

フライングワイヤ付き主翼主桁のたわみ解析

— 曲げ剛性が非線形変化する場合 —

納富 哲雄*

Analytical Investigation of Flexure of the Main Spar with Flying Wire — For Non-linear Change of EI —

by

Tetsuo NOTOMI*

要 旨

人力機の主翼主桁は、翼幅が 20m を優に超えるため複数の異なる径のパイプを継いで構成される。また、胴体下部から主翼主桁へ斜めに補強ワイヤ(飛行時に機能するため Flying Wire という)を張り、揚力による上曲げでの翼の破損を防ぐ。この主翼主桁のたわみは補強ワイヤ付き片持ち梁として解析できる。それは梁材のヤング率 E と断面二次モーメント I の積である曲げ剛性 EI を全長にわたり一定とする一様梁や、階段状に変化させるステップ梁とした解析である。後者はワイヤ取付け位置も関わり、階段数が増えるほど解析式の導出も煩雑となる割に有用性は限られる。また、継ぎ目で EI が不連続に急変することの検証も必要である。継ぎ目の構造設計には、曲げ荷重だけでなく補強ワイヤによる軸方向荷重を把握しておかなければならない。なお、人力機の主桁としても用いられる CFRP パイプは、積層繊維の向きと積層数の組合せで EI を調整できる利点がある。

本論文では、補強ワイヤ付きの主翼主桁を、胴体との固定部から翼端に向けての EI が一様な区間に非線形変化区間を継いだ場合について、補強ワイヤの伸びを考慮して梁の曲げたわみを解析する。先ず補強ワイヤ付きの片持ち梁に集中荷重および等分布荷重が作用する場合のたわみ式を導く。次にワイヤによる垂直方向付加荷重を求める。計算例で人力機の主翼主桁の CFRP パイプの物性値を用い、ステップ梁との比較検討を行う。

Key Words : 人力飛行機、主翼主桁、補強ワイヤ、曲げ剛性、非線形

1. はじめに

近年のコンピューターの発達に伴う数値解析手法の考案改善により、構造や流体分野で有限要素法や有限差分法などによる解析が主流であり、有用な汎用プログラムも市販されている。

本論文は、曲げ剛性 EI が一様な区間に非線形変化する区間を継いだ主翼主桁梁の曲げたわみ変位を、補強ワイヤの伸びを考慮して解析する。非線形変化にはウィッチ(迂池線)を適用し、梁の弾性線の方程式の厳密解を求め、補強ワイヤ付き非線形曲げ剛性片持ち梁の解析の一助とす

*崇城大学工学部宇宙航空システム工学科教授

ることを目的とする。また、計算例で EI 一様梁 2 本を継いだステップ梁との比較検証を行う。

2. 解析モデルと曲げたわみ変位表示式

図-1 に解析モデルを示す。長さ L の片主翼桁を、補強ワイヤ付きの片持ち梁と考え、座標軸を図のようにとる。ワイヤ長さを l_w 、取付位置を固定支持部から $l (> L_1)$ 、取付角を θ とする。翼自重を差し引いた揚力(上向き)を等分布荷重とし、ワイヤ張力の垂直方向成分(下向き) F を考慮するが、水平成分による梁の変形は無視する。 y 軸方向が垂直下向きであることに注意する。

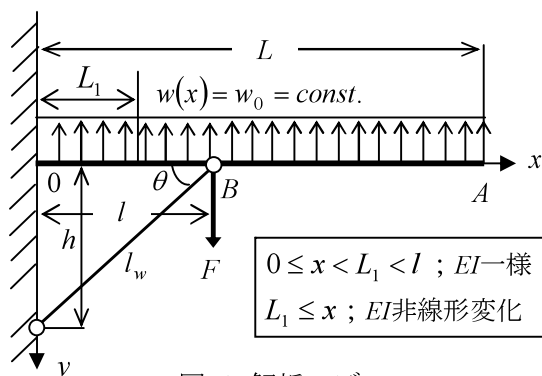


図-1 解析モデル

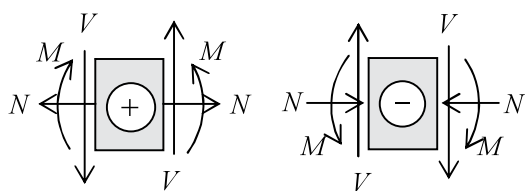


図-2 符号の定義

符号を次のように定義する(図-2)。

法線力 N は、引張を「正」

剪断力 V は、梁の左方部を右方部から上方に

向かって剪断するものを「正」

曲げモーメント M は、下方に凸型に曲げるものを「正」

曲げ剛性 EI の非線形表示にウィッチ曲線を応用し、次式で表す(付録 A)。

$$\left. \begin{aligned} EI &= (EI)_0 & ; 0 \leq x < L_1 \\ EI &= (EI)_0 \frac{px^2 + q}{mx^2 + n^2} & ; L_1 \leq x \end{aligned} \right\} \cdots (1)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} m &= \frac{k}{L^2}, \quad (k \text{ 定数} > 0) \\ n &= 1 - \frac{(EI)_1}{(EI)_0} = 1 - c, \quad (0 < c, c \neq 1) \\ p &= cm, \quad q = n^2, \quad pq > 0 \end{aligned} \right\} \cdots (2)$$

図-3 に示すように $(EI)_0$, $(EI)_1$ は、それぞれ固定支持部側および x が十分大きい位置での曲げ剛性であり、 $L_1 \leq x$ ($0 \leq X$) で非線形的に変化する。

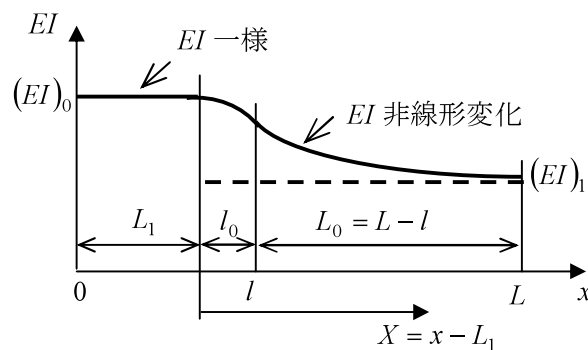


図-3 EI 変化模式図 ($c < 1$)

式(1)で表される曲げ剛性を持つ片持ち梁のワイヤ取付位置は非線形曲げ剛性部 ($L_1 < l \leq L$) とすると、図-1 で示す解析モデルの梁の曲げたわみ変位は以下の式で表せる(付録B)。

$$0 < x \leq L_1 ; EI = (EI)_0$$

$$y = \frac{1}{(EI)_0} \left\{ -\frac{w_0}{24} x^4 + \frac{1}{6} (w_0 L - F) x^3 - \frac{1}{4} (w_0 L^2 - 2Fl) x^2 \right\} \cdots (3)$$

$$L_1 < x \leq l, \quad 0 < X \leq l_0; \quad EI = f(X)$$

$$\begin{aligned} y = & \frac{1}{(EI)_0} \left[-\frac{w_0 m}{24p} X^4 + \frac{m}{6p} (w_0 L_0 - F) X^3 + \frac{1}{4p} (w_0 B + 2l_0 m F) X^2 - \frac{L_1}{6} w_0 (L_1^2 - 3LL_1 + 3L^2) X \right. \\ & + \frac{A}{p} (w_0 L_0 - F) X + \frac{F}{2} L_1 (l + l_0) X - \frac{1}{p} \left\{ \left(\frac{w_0 C}{2} + AF l_0 \right) \sqrt{\frac{p}{q}} X + A (w_0 L_0 - F) \sqrt{\frac{q}{p}} \right\} \\ & \times \arctan \left(\sqrt{\frac{p}{q}} X \right) - \frac{1}{2p} \left\{ A (w_0 L_0 - F) X - \left(\frac{w_0 C}{2} + AF l_0 \right) \right\} \ln \left(1 + \frac{p}{q} X^2 \right) \\ & \left. - \frac{w_0}{24} L_1^2 (L_1^2 - 4LL_1 + 6L^2) + \frac{F}{6} L_1^2 (2l + l_0) \right] \quad \dots (4) \end{aligned}$$

$$l < x \leq L, \quad l_0 < X \leq L_0; \quad EI = f(X)$$

$$\begin{aligned} y = & \frac{1}{(EI)_0} \left[-\frac{w_0 m}{24p} X^4 + \frac{w_0 L_0 m}{6p} X^3 + \frac{w_0 B}{4p} X^2 - \frac{w_0 L_1}{2} X \left(\frac{1}{3} L_1^2 - LL_1 + L^2 \right) + \frac{w_0 A L_0}{p} X + \frac{m F}{2p} l_0^2 X \right. \\ & + \frac{F}{2} L_1 (l + l_0) X - \frac{F}{6} \left\{ \frac{m}{p} l_0^3 + 6 \frac{A}{p} l_0 - L_1^2 (2l + l_0) \right\} - \frac{w_0}{24} L_1^2 (L_1^2 - 4LL_1 + 6L^2) \\ & - \frac{w_0}{p} \left(\frac{C}{2} \sqrt{\frac{p}{q}} X + A L_0 \sqrt{\frac{q}{p}} \right) \arctan \left(\sqrt{\frac{p}{q}} X \right) - \frac{AF}{p} \left(\sqrt{\frac{p}{q}} l_0 X - \sqrt{\frac{q}{p}} \right) \arctan \left(\sqrt{\frac{p}{q}} l_0 \right) \\ & \left. - \frac{w_0}{2p} \left(A L_0 X - \frac{C}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{p}{q} X^2 \right) + \frac{AF}{2p} (X + l_0) \ln \left(1 + \frac{p}{q} l_0^2 \right) \right] \quad \dots (5) \end{aligned}$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} X &= x - L_1, \quad l_0 = l - L_1, \quad L_0 = L - L_1 \\ A &\equiv \frac{mq}{p} - n^2, \quad B \equiv \frac{mq}{p} - (L_0^2 m + n^2), \quad C \equiv m \left(\frac{q}{p} \right)^2 - (L_0^2 m + n^2) \frac{q}{p} + L_0^2 n^2 \end{aligned} \right\} \quad \dots (6)$$

計算例で比較する異なる一様な曲げ剛性 2 本 (図-3 の破線) を継いだステップ梁の式を以下に記す。
なお、この場合も上記の非線形梁と同様に補強ワイヤ取付位置は、 $L_1 < l \leq L$ である。

$$0 < x \leq L_1; \quad EI = (EI)_0$$

$$y = \frac{1}{(EI)_0} \left\{ -\frac{w_0 x^2}{24} (x^2 - 4Lx + 6L^2) + \frac{Fx^2}{6} (3l - x) \right\} \quad \dots (7)$$

$$L_1 < x \leq l; \quad EI = (EI)_1$$

$$\begin{aligned} y = & \frac{1}{(EI)_1} \left\{ -\frac{w_0 x^2}{24} (x^2 - 4Lx + 6L^2) + D \frac{w_0 L_1}{6} (L_1^2 - 3LL_1 + 3L^2) x + \frac{Fx^2}{6} (3l - x) \right. \\ & \left. - D \frac{FL_1}{2} (2l - L_1) x - D \frac{w_0 L_1^2}{24} (3L_1^2 - 8LL_1 + 6L^2) + D \frac{FL_1^2}{6} (3l - 2L_1) \right\} \quad \dots (8) \end{aligned}$$

$$l < x \leq L; \quad EI = (EI)_1$$

$$y = \frac{1}{(EI)_1} \left\{ -\frac{w_0 x^2}{24} (x^2 - 4Lx + 6L^2) + D \frac{w_0 L_1}{6} (L_1^2 - 3LL_1 + 3L^2)x - D \frac{FL_1}{2} (2l - L_1)x \right. \\ \left. + \frac{Fl^2}{2} x - D \frac{w_0 L_1^2}{24} (3L_1^2 - 8LL_1 + 6L^2) + D \frac{FL_1^2}{6} (3l - 2L_1) - \frac{Fl^3}{6} \right\} \quad \dots (9)$$

$$\text{ここで、} D \equiv \left\{ 1 - \frac{(EI)_1}{(EI)_0} \right\} \quad \dots (10)$$

式(3)～(5)、(7)～(9)において、 $w_0 = 0$ もしくは $F = 0$ とすれば、それぞれ集中荷重または等分布荷重のみの場合の片持ち梁のたわみ変位式となる。なお、式(3)～(5)で $L_1 = 0$ かつ k を適切に選ぶ（後述）と全区間非線形 EI 梁となり、また式(7)～(9)で $(EI)_1 = (EI)_0$ （従って $D = 0$ ）とすると一様梁となる。

3. ワイヤ荷重 F の特定

補強ワイヤ付き片持ち梁のたわみ式(3)～(5)、(7)～(9)を用いて任意の位置 x, X におけるたわみを算定するには、過剰な部材である補強ワイヤによる垂直方向荷重 F を予め特定する必要がある（不静定問題）。本解析では、ワイヤの伸びを考慮し、梁の軸方向変形は無視する。以下、 F を特定する手順を示す。

式(4)または(5)で $X = l_0$ および $w_0 = 0$ または $F = 0$ とおいて、等分布もしくは集中の単独荷重による補強ワイヤ取付位置での梁の垂直方向変位 λ_1, λ_2 は次式で表される。

$$\lambda_1 = (y)_{w_0=0, X=l_0} = \frac{F\eta_1}{(EI)_0} \quad \dots (11)$$

$$\lambda_2 = (y)_{F=0, X=l_0} = \frac{w_0\eta_2}{(EI)_0} \quad \dots (12)$$

ここで、

$$\eta_1 \equiv \frac{m}{3p} l_0^3 + \frac{1}{2} L_1 (l + l_0) l_0 - \frac{A}{p} l_0 \\ + \frac{L_1^2}{6} (2l + l_0) + \frac{A}{p} l_0 \ln \left(1 + \frac{p}{q} l_0^2 \right) \\ - \frac{A}{p} \left(\sqrt{\frac{p}{q}} l_0^2 - \sqrt{\frac{q}{p}} \right) \arctan \left(\sqrt{\frac{p}{q}} l_0 \right) \quad \dots (13)$$

$$\eta_2 \equiv -\frac{m}{24p} l_0^4 + \frac{L_0 m}{6p} l_0^3 + \frac{B}{4p} l_0^2 \\ - \frac{1}{24} L_1^3 (4l_0 + L_1) + \frac{1}{6} LL_1^2 (3l_0 + L_1) \\ - \frac{1}{4} L^2 L_1 (2l_0 + L_1) + \frac{1}{p} AL_0 l_0 \\ - \frac{1}{2p} \left(C \sqrt{\frac{p}{q}} l_0 + 2AL_0 \sqrt{\frac{q}{p}} \right) \arctan \left(\sqrt{\frac{p}{q}} l_0 \right) \\ - \frac{1}{4p} (2AL_0 l_0 - C) \ln \left(1 + \frac{p}{q} l_0^2 \right) \quad \dots (14)$$

図-4 に荷重付加前後の梁とワイヤの形状変化の模式図を示す。付加前のワイヤ長さ l_w 、ヤング率 E_w 、断面積 S_w とすると、ワイヤの伸び δ による梁の垂直方向変位 λ は

$$\lambda = \frac{\delta}{\sin \theta} = \frac{Fl_w}{E_w S_w \sin^2 \theta} \quad \dots (15)$$

である。ワイヤの伸びにより上側へのたわみ（負の変位）を考慮すると、次の関係式となる。

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -\lambda \quad \dots (16)$$

式(16)に式(11)～(15)を代入して、

$$F = \frac{-w_0\eta_2}{\eta_1 + \frac{(EI)_0 l_w}{E_w S_w \sin^2 \theta}} \quad \dots (17)$$

を得る。なお、ステップ梁の場合は、式(8)ま

たは(9)から同様にして λ_1, λ_2, F を得る。

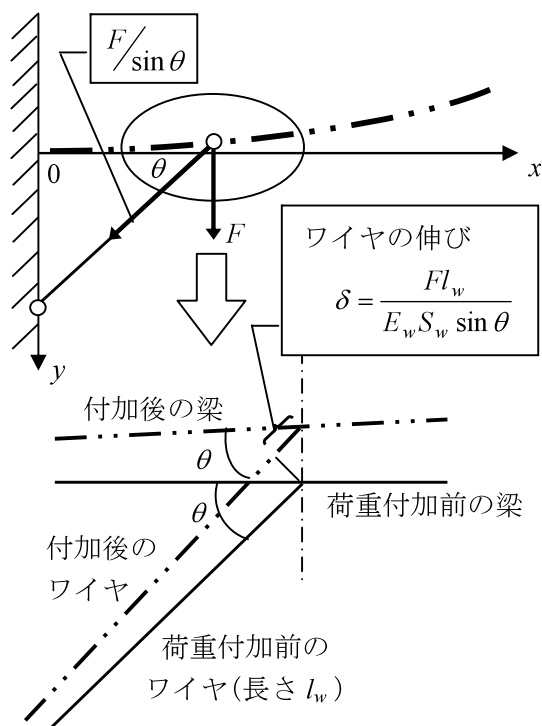


図-4 荷重付加前後の梁の形状模式図

4. 数値計算例

4-1. 梁およびワイヤの値

以下の計算例では表-1 に示す値を用いる。
なお、平成 24 年度に本学科で製作し試験飛行した人力飛行機を参考に、全備重量 $W=95(\text{kgf})$ 、主翼自重 $W_w=20(\text{kgf})$ から、片翼の分布荷重を

$$w_0 = (W - W_w) / (2L) = 24.52 \text{ N/m}$$

とした。また、固定部の断面二次モーメント I_0 は人力機主翼胴体固定部 CFRP パイプの断面形状から算出した値である。

表-1 梁および補強ワイヤ関連数値

片持ち梁長 L	15(m)
等分布荷重 w_0	24.52(N/m)
ワイヤ取付高さ h	2.0(m)
ワイヤ弾性率 E_w	97.11(GPa)
梁の弾性率 E	178(GPa)

4-2. 梁の曲げ剛性の分布

EI の変化を決める係数式(2)の定数を $k=1$ に固定し、 $c=(EI)_1/(EI)_0$ を変えた梁位置 x に対する無次元曲げ剛性 $EI/(EI)_0$ の変化曲線を、曲げ剛性一様部分がない ($L_1=0$) 場合を図-5 に示す。 x を十分大きくすれば、 $(EI)_1=c(EI)_0$ となり、 c の大小が $(EI)_1$ の大小に反映する。しかしながら、梁の自由端部 $x/L=1.0$ で $(EI)_1$ を実現できていない。また、 $x/L<0.3$ の固定支持部近傍区間で c が小さいほど大きな値を維持している。表-2 に $x/L=0.4, 1.0$ 位置での $EI/(EI)_0$ を示す。 $x/L=0.4$ で c と $EI/(EI)_0$ の大小関係に逆転が見られる。

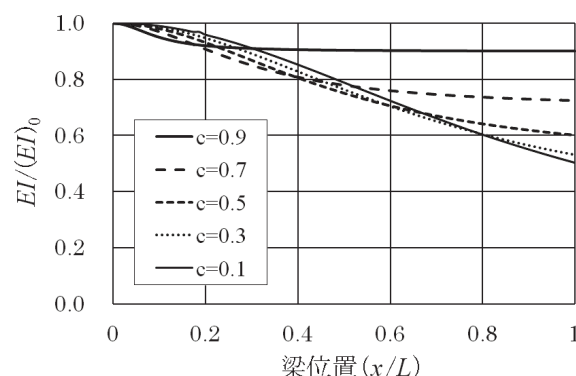


図-5 EI 変化曲線 ($k=1$ に固定)

表-2 曲げ剛性表示式係数と $EI/(EI)_0$

c		0.9	0.7	0.5	0.3	0.1
k		1	1	1	1	1
x/\mathcal{L}	0.4	0.906	0.808	0.804	0.827	0.851
	1.0	0.901	0.724	0.600	0.530	0.502

そこで式(2)の定数 k を変えて検証した結果、

$$k = 2000 \times |1 - c|^3 \quad \dots (18)$$

の関係式を用いると、 $(EI)_{x=L}/(EI)_0=c$ を小数点以下 3 桁まで実現できることが解った(表-3)。なお、 $c>1$ の場合にも適用できるように、式(18)で絶対値を用いる(付録 D 参照)。図-6 に変化曲線を示す。図から各 c に対して、 $x/L>0.3$ で $EI=(EI)_1$ とみなせる。即ち、係数 k の決定に式(18)を用いれば、実質的に本解析モデルの

支持部側 $x \leq L_1$ での $EI=(EI)_0$ と先端側の $EI=(EI)_1$ をつなぐ区間が、式(1)の非線形変化する梁となる(以後、この構成を準ステップ梁と呼ぶ)。また、 $c \rightarrow 1$ かつ式(18)の k を用いると一様梁に近づく(後述、図-8 参照)。

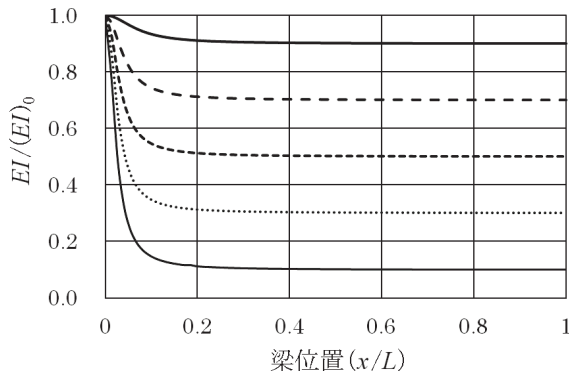


図-6 EI 変曲線(k ; 式(18)、表-3)
線種の対応は図-5 と対応

表-3 曲げ剛性表示式係数と $EI/(EI)_0$

c	0.9	0.7	0.5	0.3	0.1
k	2	54	250	686	1458
x/L	0.4	0.903	0.703	0.503	0.103
	1.0	0.900	0.700	0.500	0.100

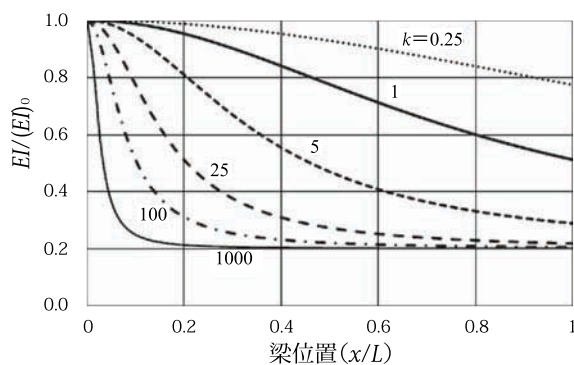


図-7 係数 k が曲げ剛性変化に及ぼす効果
($L_1=0, c=0.2$ の場合)

一方、 c を固定し k をパラメータとすると、 k が大きいほど変化は急勾配となり、自由端での曲げ剛性は $(EI)_1$ に近づき、式(18)の値を超えるとほぼ一様な曲げ剛性区間を持つようになる

る(図-7)。梁の曲げ剛性変化および自由端での $(EI)_{x=L}$ を所望の値にするには、 L_1, k, c を適切に組合せる試行錯誤が必要である(表-4)。

表-4 $(EI)_{x=L}/(EI)_0$ への k の効果
($L_1=0, c=0.2$ の場合)

k	0.25	1	5	25	100
$x/L=1.0$	0.775	0.512	0.291	0.220	0.205

4・3. 梁の曲げたわみ分布

本解析モデルでは、垂直下向きを y 座標の「正」としているため、上方へのたわみが「負」となる。以下のたわみ変位のグラフでは、上下を逆転して示す。図中の●はワイヤ位置を示す。

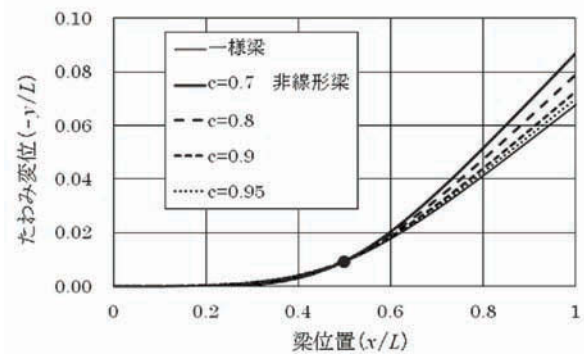


図-8 一様梁と非線形梁のたわみ変位比較

表-5 ワイヤ取付位置のたわみ変位

	非線形梁				一様梁
c	0.7	0.8	0.9	0.95	—
k	54	16	2	0.25	—
ζ	9.502	9.431	9.364	9.333	9.307

ただし、表-5 で $\zeta \equiv \left(\frac{-y}{L} \right)_{x=L} \times 10^3$ である。

図-8 はワイヤ取付位置を $L/L=0.5$ に固定し、 c を変えた場合のたわみ分布の変化を示す。係数 k は式(18)から得る値である。図-6 で見たように、 EI が非線形変化した後の区間はほぼ自由端の曲げ剛性値 $(EI)_{x=L}=(EI)_1=c(EI)_0$ となる。即ち、 $c \rightarrow 1$ で EI 一様梁に漸近し、曲げたわみ

変位分布も一様梁に限りなく近づく。非線形曲げ剛性を持つ片持ち梁のたわみ式(3)～(6)の整合性を示している。図で差異が顕著でないワイヤ取付位置のたわみ変位は、 $c \rightarrow 1$ と共に大きな値から一様梁の変位量に近づいている(表-5)。即ち、 $c \rightarrow 1$ とすると、準一様梁となる。

図-9 に異なる $EI(7\text{m}+8\text{m})$ で構成されるステップ梁と、自由端側 8m が非線形変化部の梁(準ステップ梁)について、曲げ剛性が急変する区間を拡大して示す。計算例の非線形係数、曲げ剛性比および固定端と先端の断面二次モーメントは、各々、 $k=43015$ 、 $I_0=1.069 \times 10^{-7} \text{ m}^4$ 、 $I_1=3.241 \times 10^{-8} \text{ m}^4$ である。従って、 $c=0.3032$ となる(付録 C)。準ステップ梁が接続部でやや大きく、 $(EI)_1$ に漸近することが解る。

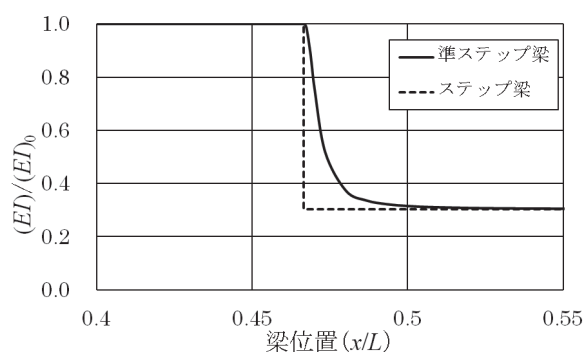


図-9 ステップ梁と準ステップ梁の曲げ剛性 $c=0.3032$ (曲げ剛性急変区間を拡大)

図-10 は、補強ワイヤ無しと、7.5m($x/L=0.5$)位置に取り付けた場合の無次元曲げ剛性と無次元曲げ変位を示す。ステップ梁と準ステップ梁のたわみ変位の差はほとんどないが、後者が若干少ない。これは、継ぎ目(ステップ部)の曲げ剛性がステップ梁よりやや大きいことによる(図-9 参照)。補強ワイヤにより先端の曲げ変位を大幅に減らすことができる。

表-6 に $L=15\text{m}$ として、補強ワイヤの有無による梁中央位置(ワイヤ取付位置)と先端での変位量(m)を示す。ステップ梁と準ステップ梁それぞれで、ワイヤ有無に関わらず梁中央の変位の差異は顕著ではないが、ワイヤ有無によ

る先端の変位縮減はステップ梁がやや大きい ($9.671 - 2.740=6.931\text{m}$ 、 $9.515 - 2.667=6.848\text{m}$)。即ち、少なくとも曲げたわみ変位分布のステップ梁による算定は有用である。

ワイヤ取付位置を変えた場合の準ステップ梁のたわみ変位へ及ぼす影響を図-11 に示す。梁の補強ワイヤの取付位置が自由端側に近いほど自由端の曲げたわみ変位は少なくなる。

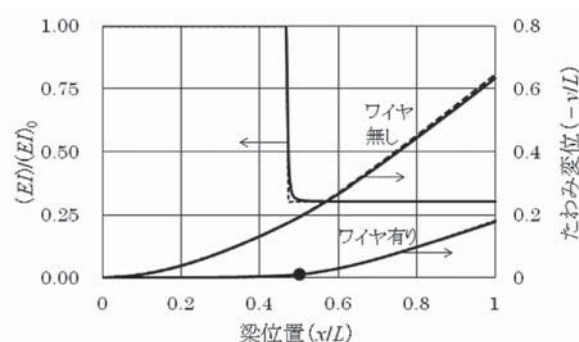


図-10 ステップ梁(破線)と準ステップ梁(実線、 $L_1/L=0.467$)の比較

表-6 変位量(m)の比較(梁長 $L=15\text{m}$)
中央にワイヤ取付($l/L=0.5$)

変位 ワイヤ	ステップ梁		準ステップ梁	
	中央	先端	中央	先端
無	2.899	9.671	2.893	9.515
有	0.143	2.740	0.143	2.667

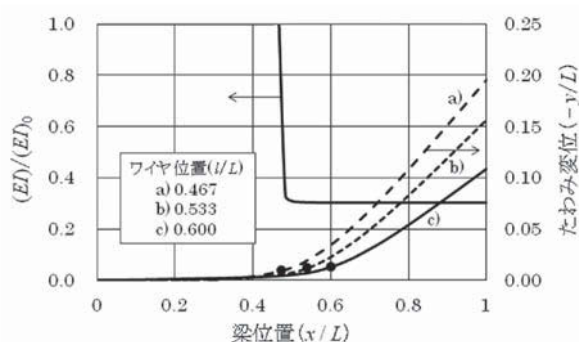


図-11 準ステップ梁のワイヤ位置の影響

図-12 は一様梁 5 本を継いで構成される本学の人力機 ARSP-312 の主翼主桁(付録 C 参

照)の曲げ剛性(折れ線)を近似する非線形曲線と、それに対応するたわみ変位分布を示す(ただし、 $(EI)_0 = 2.665 \times 10^4 \text{ Nm}^2$)。補強ワイヤの効果によりワイヤ取付位置までの区間はほぼ同じだが、曲げ剛性近似分布値が大きいほど、たわみ変位分布の勾配は小さい。なお、近似に用いた係数と先端(翼端)の曲げ剛性値および計算で得られた自由端のたわみ変位を表-7に示す。

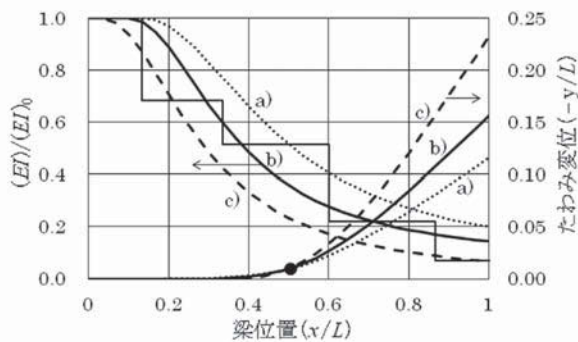


図-12 無次元曲げ剛性の近似とたわみ変位
(折れ線は人力機主翼主桁曲げ剛性)

表-7 近似係数と先端曲げ剛性値および変位

記号	$L_1(\text{m})$	c	k	$\frac{(EI)_{x=L}}{(EI)_0}$	$\left(\frac{y}{L}\right)_{x=L}$
a)	2.0	0.0688	7	0.201	-0.116
b)	1.5	0.0688	12	0.145	-0.156
c)	0.5	0.0005	15	0.0670	-0.233

図-13 は、図-12 に示す b)の曲げ剛性梁(左目盛り)に於ける補強ワイヤ取付位置が曲げたわみ変位分布に及ぼす影響である。取付位置が先端側に近いほど先端のたわみ変位は少なくなるが、先端側へ近づきすぎると曲げモードが変わり最大たわみ位置は先端から固定部とワイヤ取付位置の途中に移る。なお、ステップ梁の場合は非線形梁よりたわみ変位量が大きく図-13 と同様な傾向を示す。

図-13 における梁の曲げ剛性 b) の場合のワ

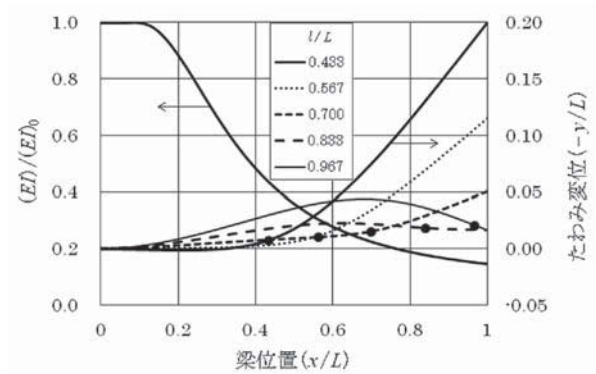


図-13 補強ワイヤ取付位置の効果例
(曲げ剛性分布は、図-12 の b))

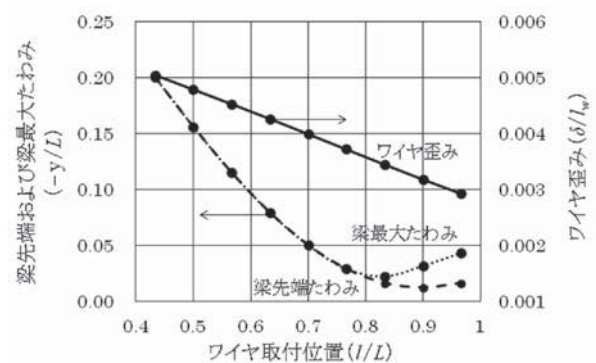


図-14 ワイヤ取付位置がワイヤ歪みおよび
梁たわみ変位に及ぼす効果
(曲げ剛性分布は、図-12 の b))

イヤの歪み、梁先端および最大曲げたわみ変位に、ワイヤ取付位置が及ぼす効果を図-14 に示す。取付位置 $l/L \rightarrow 1$ と共に、図におけるワイヤ取付角 θ は約 17.10 から 7.85 度へ、変形前のワイヤ長さ l_w はほぼ 6.8 から 14.6m へ、ワイヤ張力は 1540 から 894N へ、梁軸力(圧縮力)は 1472 から 886N へ変化する。

ワイヤ位置が梁先端に近づくに従ってワイヤの長さ l_w は増加し、歪みも増える。即ち、ワイヤ取付位置が梁先端に近づくに従ってワイヤの必要長さ l_w は増加するが、ワイヤ張力および歪みは減少する。また梁先端たわみ変位は最小となる取付位置が存在する。梁の最大たわみ位置は概ね梁先端だが、ワイヤ取付位置が先端に近づくるとたわみモードが変わり最大たわみ位置はモードの「腹」に移る。

人力機の主翼主桁を想定すると、ワイヤ取付位置が主桁の先端側ほど主桁の先端たわみ変位を抑えられ、かつワイヤ張力は少なくなるが、ワイヤ必要長さは長くなるので、ワイヤの必要強度や空力抵抗(ワイヤ直径および長さに比例)も勘案して決定しなければならない。

なお、以上において $0 < c < 1$ の計算例を示した。 $1 < c$ については付録 D に計算例を示す。また、 E 一定で非線形曲げ剛性 EI のパイプ梁を実現するための管径比について付録 E に記す。

5. 結論

人力飛行機の補強ワイヤ付き主翼主桁を次のような片持ち梁に置き換えて解析した。翼自重を差し引いた揚力の上向き等分布荷重と、ワイヤによる下向き集中荷重が共に働く片持ち梁にモデル化し、ワイヤの伸びを考慮しかつ曲げ剛性が非線形変化する梁の曲げたわみ変位の解析解を求めた。なお、非線形変化にはウィッチ曲線を適用した。得られた解析解による数値計算を行い、以下の結論を得た。

- (1) 非線形変化にウィッチ曲線変化を適用し有用な曲げたわみ変位の解析式を得た。
- (2) 曲げ剛性変化曲線の係数および一様部区間長さを適宜組み合わせることで、準一様梁、準ステップ梁を含む多様な変化曲線の梁を実現し、その梁の曲げたわみ変位を算定できる。
- (3) 複数のパイプを継いで構成する人力機の主翼主桁に補強ワイヤを付けた場合の曲げたわみの有用な解析手法と成り得る。

なお、本解析手法は両端自由支持梁などへの展開もできる。

謝辞

本論文の作成にあたり、宇宙航空システム工学科 高雄善裕教授に貴重なアドバイスを頂いた。また、EXCEL を駆使して数値計算、図表の作成に助力頂いた本学科 4 年の卒業研究生・吉田鴻司君、貴重なデータを提供頂いた千馬浩充助教へ感謝の意を表します。

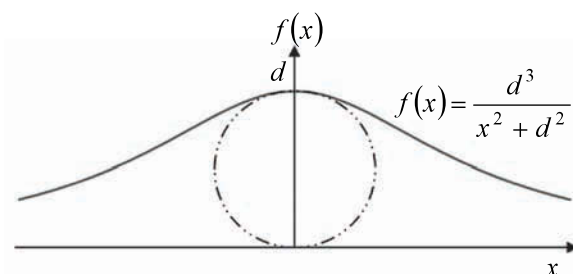
なお、本論文は「日本航空宇宙学会西部支部講演会 2013」にて口頭発表を行った。

参考文献

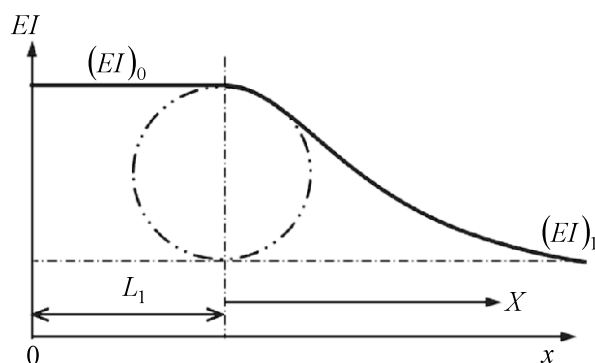
- 1) S.TIMOSHENKO and D.H.YOUNG(前澤成一郎 訳)「材料力学要論」コロナ社
- 2) 森口繁一、宇田川銑久、一松 信「数学公式 I」岩波書店
- 3) 福田 博、邊 吾一「複合材料の力学序説」古今書院
- 4) 平松 徹「トコトンやさしい炭素繊維の本」日刊工業新聞社
- 5) 稲垣道夫「カーボン古くて新しい材料」森北出版
- 6) 中山泰喜「流体の力学」養賢堂

付録A ウィッチの EI 非線形変化への適用

付図-1 にウィッチ (迂池線) を示す。 $x \rightarrow \pm\infty$ で $f(x) \rightarrow 0$ となる。この変化曲線を本解析モデルの EI 非線形変化に、以下のように適用する。



付図-1 ウィッチ (迂池線)



付図-2 EI 変化曲線模式図

付図-2 に示すように、 EI 一様区間と非線形変化区間に分け、非一様区間を座標 X で表す。

$$0 < x \leq L_1 ;$$

$$EI = (EI)_0 = \text{一定} \quad \dots (A-1)$$

$$L_1 < x \leq L, \quad 0 < X (= x - L_1) \leq L_0 (= L - L_1) ;$$

$$\begin{aligned} EI = f(X) &= (EI)_1 + (EI)_0 \frac{n^3}{mX^2 + n^2} \\ &= (EI)_0 \left(c + \frac{n^3}{mX^2 + n^2} \right) = (EI)_0 \frac{pX^2 + q}{mX^2 + n^2} \end{aligned} \quad \dots (A-2)$$

ここで、 $k > 0$ の定数で、

$$m = \frac{k}{L^2} > 0, \quad n = 1 - \frac{(EI)_1}{(EI)_0} = 1 - c$$

本解析解の式(3)～(5)では p, q をそのまま残している、式(2)と独立に $pq > 0$ を満足する p, q を与えても良い。ただし、その場合は当然ながらウィッチ曲線から逸れる。

付録B 補強ワイヤ付き片持ち梁の曲げ変位式の導出

解析モデル(図-1 参照)における EI 一様と非線形区間を持つ片持ち梁の曲げたわみ変位式の導出手順を示す。

ワイヤによる垂直下向きの荷重 F と上向きの等分布荷重 w_0 による曲げモーメント M_x (もしくは M_X) は、以下ようになる。

$$0 < x \leq l, \quad -L_1 < X \leq l_0 (= l - L_1) ;$$

$$M_x = \frac{w_0}{2} (L - x)^2 - F(l - x) \quad \dots (B-1)$$

$$M_X = \frac{w_0}{2} (L_0 - X)^2 - F(l_0 - X) \quad \dots (B-1')$$

$$l < x \leq L, \quad l_0 < X \leq L_0 (= L - L_1) ;$$

$$M_x = \frac{w_0}{2} (L - x)^2 \quad \dots (B-2)$$

$$M_X = \frac{w_0}{2} (L_0 - X)^2 \quad \dots (B-2')$$

梁の弾性線の微分方程式は、 M_x または M_X および EI の違いを考慮すると、次のようになる。

$$0 < x \leq L_1, \quad -L_1 < X \leq 0 ; \quad EI = (EI)_0 \text{一定}$$

$$(EI)_0 \frac{d^2 y}{dx^2} = -M_x \quad \dots (B-3)$$

$$L_1 < x \leq l, \quad 0 < X \leq l_0 \text{ および}$$

$$l < x \leq L, \quad l_0 < X \leq L_0 ; \quad EI = f(X)$$

$$(EI)_0 \frac{pX^2 + q}{mX^2 + n^2} \frac{d^2 y}{dX^2} = -M_X$$

変数因子を右辺に移して、

$$(EI)_0 \frac{d^2 y}{dX^2} = -M_X \frac{mX^2 + n^2}{pX^2 + q} \quad \dots (B-4)$$

式(B-3),(B-4)の右辺 M_x, M_X に対応する区間の曲げモーメント式(B-1),(B-1'),(B-2')を用いる。

$$0 < x \leq L_1 ;$$

$$(EI)_0 \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{w_0}{2} (L - x)^2 + F(l - x) \quad \dots (B-5)$$

$$L_1 < x \leq l, \quad 0 < X \leq l_0 ;$$

$$\begin{aligned} (EI)_0 \frac{d^2 y}{dX^2} &= -\frac{w_0}{2} \frac{(mX^2 + n^2)(L_0 - X)^2}{pX^2 + q} \\ &\quad + F \frac{(mX^2 + n^2)(l_0 - X)}{pX^2 + q} \end{aligned} \quad \dots (B-6)$$

$$l < x \leq L, \quad l_0 < X \leq L_0$$

$$(EI)_0 \frac{d^2 y}{dX^2} = -\frac{w_0}{2} \frac{(mX^2 + n^2)(L_0 - X)^2}{pX^2 + q} \quad \dots (B-7)$$

上式を積分するに当たり、梁の固定位置 $x=0$ で梁の勾配 dy/dx (または dy/dX) および変位 y が共に零、区間の境界で勾配および変位がそ

それぞれ連続である条件を満足させる。なお、一様 EI を継いだ梁は、上述の境界条件のもとで弾性線の方程式を直接積分して導出する。

付録C 計算例のCFRP諸元

付表-1 に示す#1~5 の CFRP パイプで構成される片翼 15m の主桁を、胴体側 7.0m と翼端側 8.0m の 2 本構成で近似する。なお、管肉厚は総て同じで $t=3.6 \times 10^{-4}$ m である。

付表-1 人力機 ARSP321 主桁

桁#	内径 d $\times 10^{-1}$ m	管長 l m	$d^3 l$ $\times 10^{-3}$ m ⁴
1	1.0194	1.70	1.8008
2	0.8975	3.39	2.4508
3	0.8176	1.91	1.0439
計	———	7.00	5.2955
3	0.8176	1.48	0.80719
4	0.6176	3.39	0.79858
5	0.4176	3.13	0.22794
計	———	8.00	1.8337

胴体側主桁

平均内径

$$\bar{d}_c = \sqrt[3]{\frac{\sum (d^3 l)_i}{\sum l_i}} = \sqrt[3]{\frac{5.2955 \times 10^{-3}}{7.00}} \approx 9.11 \times 10^{-2} \text{ m}$$

平均断面二次モーメント

$$\bar{I}_c \approx \frac{\pi}{8} \bar{d}_c^3 t \approx 1.069 \times 10^{-7} \text{ m}^4$$

翼端側主桁

$$\bar{d}_o = \sqrt[3]{\frac{\sum (d^3 l)_i}{\sum l_i}} = \sqrt[3]{\frac{1.8337 \times 10^{-3}}{8.00}} \approx 6.12 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$\bar{I}_o \approx \frac{\pi}{8} \bar{d}_o^3 t \approx 3.241 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

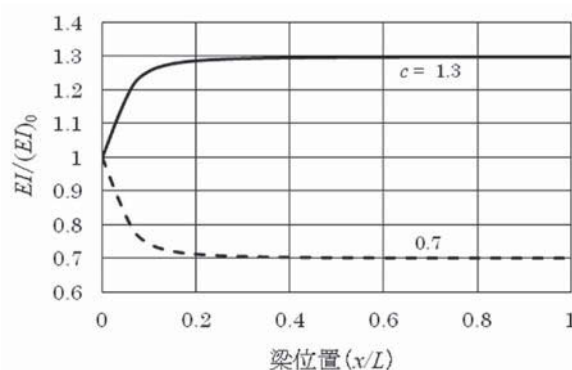
従って、

$$c = \frac{(EI)_1}{(EI)_0} = \frac{\bar{I}_o}{\bar{I}_{ci}} \approx 0.3032$$

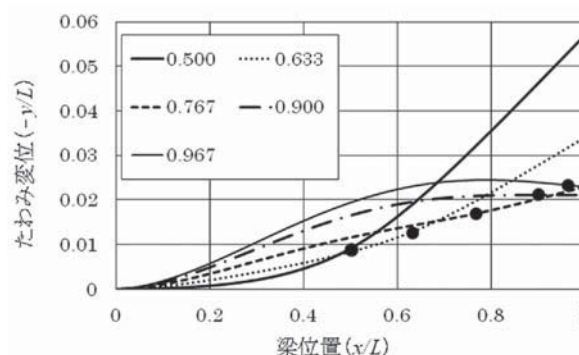
付録D $1 < c$ の場合の計算例

付図-3 に、 $c=1.3$ の場合の曲げ剛性の変化を、 $c=0.7$ と比較して示す。この場合、曲げ剛性式に用いる係数 k は式(18)より得られる $k=54$ を用いた。 $EI/(EI)_0=1$ を中心に上下対象な分布となる。即ち、図-6 でも見たように固定部で $(EI)_0$ から $x/L > 0.3$ で自由端と同じ $EI=(EI)_1=c(EI)_0$ の曲げ剛性分布となっている。

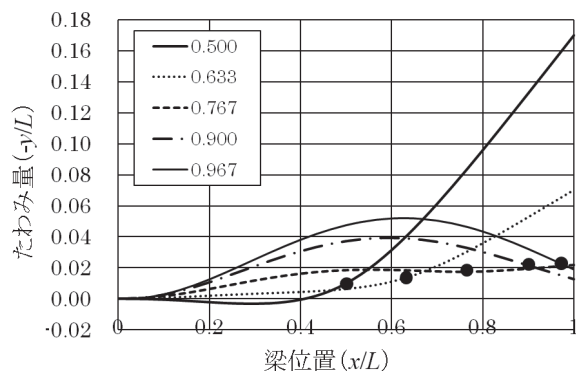
付図-4、5 は、付図-3 の曲げ剛性分布梁で、ワイヤ取付位置を変えた場合の曲げたわみ分布である。 $c < 1$ と比べ梁の曲げ剛性が大きいため、先端のたわみ変位、最大たわみ変位共に小さい(縦軸目盛りの違いに注意)。 $c=0.7$ の場合、逆方向へのたわみ変位も明瞭に見られる。



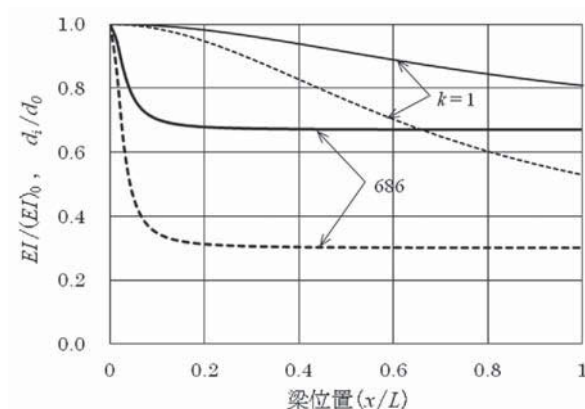
付図-3 $c=0.7, 1.3$ の曲げ剛性分布 ($k=54$)



付図-4 $c=1.3$ の曲げたわみ分布 ($k=54$)
(ワイヤ取付位置の効果)



付図-5 $c=0.7$ の曲げたわみ分布 ($k=54$)
(ワイヤ取付位置の効果)



付図-6 無次元曲げ剛性(破線)とそれを実現する内径比(実線)の分布 ; $c=0.3$

付録 E ウィッチ曲線変化曲げ剛性梁の実現

今、片持ち梁の固定部と任意の x 位置での曲げ剛性値をそれぞれ $(EI)_0, (EI)_x$ とする。パイプの断面二次モーメント式は、パイプの肉厚 t が十分小さい ($t \ll d_i$ または、 $t \ll d_o$, d_i, d_o ; 内径、外径) とすると、

$$I = \frac{\pi}{64} (d_o^4 - d_i^4) \approx \frac{\pi}{8} d_i^3 t \quad \dots (C-1)$$

で与えられる。従って、

$$\frac{(EI)_x}{(EI)_0} = \frac{(Ed_i^3 t)_x}{(Ed_i^3 t)_0} \quad \text{より}$$

肉厚および弾性係数 E がパイプの各軸位置で等しければ、任意の位置の断面内径は、

$$(d_i)_x = \sqrt[3]{\frac{(EI)_x}{(EI)_0}} \cdot (d_i)_0 \quad \dots (C-2)$$

となる。付図-6 に EI 比を実現する内径比の変化を $c=0.3, k=1, 686$ (式(18)) から得られる値、表-3 参照) の場合について示す。