ベーシック森田同値の局所構造に関する注意 II

河合　浩明 *

Remarks on the Local Structure of Basic Morita Equivalences II

by

Hiroaki KAWAI *

要　旨

[4] において、加群 M がブロック多元環 $\mathcal{O}Gb$ と $\mathcal{O}G'b'$ の間のベーシック森田同値を導くとき、それらの局所ブロック多元環 $kC_G(Q)\bar{b}(\delta)$ と $kC_{G'}(Q')\bar{b}(\delta')$ の間のベーシック森田同値を導く加群 $M(Q_\delta)$ が存在することが示された。この結果に対して、[2] において、M が本文の (1.1) の埋め込みによって定まり、$M(Q_\delta)$ が本文の (1.2) の埋め込みによって定まることを示した。さらに、[2] におて (1.1) の θ と (1.2) の θ_Q を関連づける可換図式が存在することを示した。この論文では、M と $M(Q_\delta)$ の間の関係を求めることを目標として、(1.1) と (1.2) における λ と λ_Q の関係および ϕ と ϕ_Q の関係について考察する。

Key Words : Finite group, Block, Interior algebra, Multiplicity algebra, Basic Morita equivalence

1. はじめに

p は素数、k は標数 p の代数的閉体そして $\mathcal{O}$ は完備な離散付値環で、その剰余体 $\mathcal{O}/\mathcal{P}$ が k となるものとする（$\mathcal{P}=0$ のときは $\mathcal{O}=k$）。全ての $\mathcal{O}$-加群（$\mathcal{O}$-多元環は $\mathcal{O}$-加群として）は有限生成とする。G と G' を有限群、b と b' をそれぞれ G と G' のブロックとし、ブロック多元環を $A=\mathcal{O}Gb$、$A'=\mathcal{O}G'b'$ とおく。M を直既約 A-A'-両側加群とし、左 A-加群、右 A'-加群として射影的とする。また、M を直既約 $\mathcal{O}(G\times G')$-加群とみなしたとき、そのヴァーテックスを $\ddot{P}\neq 1$、$\mathcal{O}\ddot{P}$-ソースを N とする。さらに、射影写像 $G\times G'\to G$、$G\times G'\to G'$ を $\ddot{P}$ に制限することによって得られる写像をそれぞれ $\sigma:\ddot{P}\to P$、$\sigma':\ddot{P}\to P'$ とする。ここで、$\sigma(\ddot{P})=P$、$\sigma'(\ddot{P})=P'$ である。

M が A と A' の間の森田同値を導くとする。このとき、P はブロック b の不足群、P' はブロック b' の不足群となり（[4、定理 6.9] 参照)、次の $\mathcal{O}G$-インテリア多元環としての埋め込みが存在する（[2、(3.4.1)] 参照)。

(1.1)

$$A=\mathcal{O}Gb\xrightarrow{\lambda}\mathrm{Ind}_P^G(A_\gamma)$$
$$\xrightarrow{\theta}\mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{G\times G'}(\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(N))^{1\times G'}$$
$$\xrightarrow[\sim]{\phi}\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{G\times G'}(N))^{1\times G'}$$

さらに、上記の σ、σ' について、σ が同型となることと、σ' が同型になることは同値となる。この同値条件がみたされるとき、M は A と A' の間のベーシック森田同値を導くという（[4] または [2、4.1 節] 参照)。このとき、P の任意の部分群 $Q\neq 1$ に対して、$\ddot{Q}=\sigma^{-1}(Q)$、$Q'=\sigma'(\ddot{Q})$ とおく。さらに、σ と σ' の制限で与えられる同型を $\sigma_Q:C_{\ddot{P}}(\ddot{Q})\xrightarrow{\cong}C_P(Q)$、$\sigma'_Q:C_{\ddot{P}}(\ddot{Q})\xrightarrow{\sim}C_{P'}(Q')$ とする。

[4] において Puig は以下ことを示した。M が A と A' の間のベーシック森田同値を導くとき、上記の Q と Q' の対応のもとで、局所ポイント付き部分群の組 Q_δ と $Q'_{\delta'}$ がそれぞれ A_γ と $A'_{\gamma'}$ 上に定まり

* 崇城大学工学部総合教育教授

（A_γ、$A'_{\gamma'}$ については、[4、定理 6.9] 参照)、$\bar{b}(\delta)$ と $\bar{b}(\delta')$ をそれぞれ $kC_G(Q)$ と $kC_{G'}(Q')$ のブロックで $\bar{b}(\delta)\mathrm{Br}_Q(\delta) = \mathrm{Br}_Q(\delta)$ と $\bar{b}(\delta')\mathrm{Br}_{Q'}(\delta') = \mathrm{Br}_{Q'}(\delta')$ をみたすものとする。このとき、$kC_G(Q)\bar{b}(\delta)$ と $kC_{G'}(Q')\bar{b}(\delta')$ の間のベーシック森田同値を与える $kC_G(Q)$-$kC_{G'}(Q')$-両側加群 $M(Q_\delta)$ が存在する。

$M(Q_\delta)$ はヴァーテックス $C_{\ddot{P}}(\ddot{Q})$ をもち（ベーシック森田同値の条件より $C_G(Q) \times C_{G'}(Q') \cong C_{G\times G'}(\ddot{Q})$ となる)、$kC_{\ddot{P}}(\ddot{Q})$-ソース加群を $N(Q_\delta)$ で表すとき、(1.1) と同様に次の $kC_G(Q)$-インテリア多元環としての埋め込みが得られる（[2、(4.1.4)] 参照)。

(1.2)

$$kC_G(Q)\bar{b}(\delta) \xrightarrow{\lambda_Q} \mathrm{Ind}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)}(A_\varepsilon(Q))$$
$$\xrightarrow{\theta_Q} \mathrm{Ind}_{C_{\ddot{P}}(\ddot{Q})}^{C_{G\times G'}(\ddot{Q})}(\mathrm{End}_k\big(N(Q_\delta)\big)^{1\times C_{G'}(Q')}$$
$$\underset{\sim}{\xrightarrow{\phi_Q}} \mathrm{End}_k\Big(\mathrm{Ind}_{C_{\ddot{P}}(\ddot{Q})}^{C_{G\times G'}(\ddot{Q})}\big(N(Q_\delta)\big)\Big)^{1\times C_{G'}(Q')}$$

[2] の系 3.4.1 と系 4.1.3 において、M が (1.1) における合成写像によるブロック b の像によって定まる $\mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{G\times G'}(N)$ の直和因子として、$M(Q_\delta)$ が (1.2) における合成写像によるブロック $\bar{b}(\delta)$ の像によって定まる $\mathrm{Ind}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)}\big(N(Q_\delta)\big)$ の直和因子として、それぞれ与えられることを示した。さらに、(1.1) における θ と (1.2) における θ_Q に対して、次を示した（この論文では、[2] における θ_0、θ_2 を θ、θ_Q と表すことにする)。

定理 1.1([2、定理 4.2.7])　$A = \mathcal{O}Gb$ と $A' = \mathcal{O}G'b'$ がベーシック森田同値であるとする。このとき、次の多元環準同型から成る可換図式が得られる。特に、$\widehat{\iota_j}$（$j = 0$、4）はインテリア多元環としての埋め込みである。

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ind}_P^G(A_\gamma)^Q \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\mathrm{Br}_0"'] & \mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{G\times G'}(\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(N))^{\ddot{Q}} \arrow[d, "\mathrm{Br}_4"] \\
\mathrm{Ind}_P^G(A_\gamma)(Q) \arrow[r, "\theta_1"] & \mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{G\times G'}(\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(N))(\ddot{Q}) \\
\mathrm{Ind}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)}(A_\varepsilon(Q)) \arrow[r, "\theta_Q"] \arrow[u, "\widehat{\iota_0}"] & \mathrm{Ind}_{C_{\ddot{P}}(\ddot{Q})}^{C_{G\times G'}(\ddot{Q})}(\mathrm{End}_k(N(Q_\delta))) \arrow[u, "\widehat{\iota_4}"']
\end{tikzcd}$$

図式-1.1

2 章において、(1.1) の λ と (1.2) の λ_Q の関係につて考察する。3 章と 4 章では (1.1) の ϕ と (1.2) の ϕ_Q の関係について考察し、2 章の結果と合わせて M と $M(Q_\delta)$ の関係についての結果（系 3.2.3 と系 4.2.2）を与える。特に、3 章ではベーシック森田同値の特別な場合である Puig 同値に対して上記問題を考察する。

この論文で用いる用語と記号は、ことわりがなければ、[2] に従う。基本概念の説明については、[2、2 章] を参照。また、多元環における 2 つの元の積を表すとき、表記を明確にするために、2 つの元の間に点を入れる場合がある。

2. Higman 埋め込み

2.1 この章のための準備

直既約 A-A'-両側加群 M が A と A' の間のベーシック森田同値を導くとし、$Q \neq 1$ をブロック b の不足群 P の任意の部分群とする。(1.1)、(1.2) における Higman 埋め込み λ、λ_Q に対して、次の図式が得られる。

$$\begin{tikzcd}
A^Q \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\mathrm{Br}_Q"'] & \mathrm{Ind}_P^G(A_\gamma)^Q \arrow[d, "\mathrm{Br}_0"] \\
kC_G(Q)\mathrm{Br}_Q(b) \arrow[r, "\bar{\lambda}"] & \mathrm{Ind}_P^G(A_\gamma)(Q) \\
kC_G(Q)\bar{b}(\delta) \arrow[r, "\lambda_Q"] \arrow[u, hook] & \mathrm{Ind}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)}(A_\varepsilon(Q)) \arrow[u, "\widehat{\iota_0}"']
\end{tikzcd}$$

図式-2.1.1

ここで、Br_0 と $\widehat{\iota_0}$ は 定理 1.1 における Brauer 準同型と $kC_G(Q)$-インテリア多元環としての埋め込み、Br_Q は Brauer 準同型、$\bar{\lambda}$ は λ から導かれる $kC_G(Q)$-インテリア多元環としての埋め込みである。さらに、記号の付いていない写像は包含写像を表す。この図式の上の四角形は可換であるが、下の四角形は可換とは限らない。もし下の四角形が可換であれば、$\mathrm{Br}_0(\lambda(b))\widehat{\iota_0}\big(\lambda_Q(\bar{b}(\delta))\big) = \widehat{\iota_0}\big(\lambda_Q(\bar{b}(\delta))\big)$ が成立する。以下の定理 2.2.2 と定理 2.4.2 において、この等式と類似な等式が得られることを示す。また、$a \in A^P$ に対して、Q と P に関する

Brauer 準同型による像をそれぞれ、$\mathrm{Br}_Q(a)$ または $\bar{a}$、$\mathrm{Br}_P(a)$ または $\bar{\bar{a}}$ で表す。

[4、定理 6.9] より、P_γ はブロック多元環 $A = \mathcal{O}Gb$ のポイント付き不足群となる。そこで、ブロック b を次のように表す $j \in \gamma$ と a'、$a'' \in A^P$ が存在する ([5] 参照)。

(2.1.1) $\quad b = \mathrm{Tr}_P^G(a'ja'')$

このとき、(1.1) における Higman 埋め込み λ は具体的に次で与えられる ([5、定理 17.1] 参照)。$\alpha \in A$ に対して、

(2.1.2) $\quad \lambda(\alpha) = \displaystyle\sum_{x,y \in [G/P]} x \otimes_P ja''x^{-1}\alpha y a'j \otimes_P y^{-1}$

2.2 $Q = P$ の場合

この節では $Q = P$ と仮定する。このとき、[4、7 章] におけるポイント δ、ε の取り方より、$\delta = \varepsilon = \gamma$ が成り立つ。また、この節では $\otimes = \otimes_{Z(P)}$ の意味である。

補題 2.2.1 上記の記号のもと、次の等式を満たす $Z(kC_G(P))\bar{b}(\gamma)$ における可逆元 c_p が存在する。

(2.2.1) $\quad \bar{b}(\gamma) = \mathrm{Tr}_{Z(P)}^{C_G(P)}(c_p \cdot \mathrm{Br}_P(a'ja''))$

[**証明**] (2.1.1) で示したように、ブロック b は $b = \mathrm{Tr}_P^G(a'ja'')$ と表される。$\alpha = a'ja''$ とおく。$\bar{\bar{b}} = \mathrm{Br}_P(\mathrm{Tr}_P^G(\alpha))$ に対して、[2、(4.2.27)] を導く議論と同様な議論をおこなうことによって次が得られる。

(2.2.2) $\quad \mathrm{Br}_P(\mathrm{Tr}_P^G(\alpha)) = \mathrm{Br}_P(\mathrm{Tr}_P^{N_G(P)}(\alpha))$

そこで、$\bar{\bar{b}}$ は次のように表される。

(2.2.3)
$$\begin{aligned}\bar{\bar{b}} &= \mathrm{Br}_P\Big(\mathrm{Tr}_{PC_G(P)}^{N_G(P)}(\mathrm{Tr}_P^{PC_G(P)}(\alpha))\Big)\\ &= \mathrm{Br}_P\Big(\mathrm{Tr}_{PC_G(P)}^{N_G(P)}(\mathrm{Tr}_{Z(P)}^{C_G(P)}(\alpha))\Big)\end{aligned}$$

このとき、$x \in N_G(P)$ に対して、次が成り立つ。

(2.2.4)
$$\begin{aligned}&\bar{b}(\gamma)^x \cdot \mathrm{Br}_P\big(\mathrm{Tr}_{Z(P)}^{C_G(P)}(\alpha)\big)^x = \big(\bar{b}(\gamma) \cdot \mathrm{Tr}_{Z(P)}^{C_G(P)}(\bar{\bar{\alpha}})\big)^x\\ &= \big(\mathrm{Tr}_{Z(P)}^{C_G(P)}(\bar{\bar{\alpha}})\big)^x = \mathrm{Br}_P\big(\mathrm{Tr}_{Z(P)}^{C_G(P)}(\alpha)\big)^x\end{aligned}$$

そこで、$T = \{x \in N_G(P) \mid \bar{b}(\gamma)^x = \bar{b}(\gamma)\}$ とおくと、次が得られる。

(2.2.5)

$x \in T$ に対して、

$$\bar{b}(\gamma) \cdot \mathrm{Br}_P\big(\mathrm{Tr}_{Z(P)}^{C_G(P)}(\alpha)\big)^x = \mathrm{Br}_P\big(\mathrm{Tr}_{Z(P)}^{C_G(P)}(\alpha)\big)^x$$

$x \in (N_G(P) - T)$ に対して、

$$\bar{b}(\gamma) \cdot \mathrm{Br}_P\big(\mathrm{Tr}_{Z(P)}^{C_G(P)}(\alpha)\big)^x = 0$$

式 (2.2.3) と (2.2.5) より、$\bar{b}(\gamma) = \bar{b}(\gamma)\bar{\bar{b}}$ は次のように表される。

(2.2.6) $\quad \bar{b}(\gamma) = \displaystyle\sum_{x \in [T/PC_G(P)]} \mathrm{Br}_P(\mathrm{Tr}_{Z(P)}^{C_G(P)}(\alpha))^x$

ここで、(2.2.5) の最初の等式より、任意の $x \in T$ に対して $\mathrm{Br}_P(\mathrm{Tr}_{Z(P)}^{C_G(P)}(\alpha))^x \in Z(kC_G(P)\bar{b}(\gamma)$ である。このとき、$Z(kC_G(P))\bar{b}(\gamma)$ が局所環より、式 (2.2.6) の和におけるある成分 $\mathrm{Br}_P(\mathrm{Tr}_{Z(P)}^{C_G(P)}(\alpha))^x$ は $Z(kC_G(P))\bar{b}(\gamma)$ における可逆元、つまり、$\bar{b}(\gamma) = c \cdot \mathrm{Br}_P(\mathrm{Tr}_{Z(P)}^{C_G(P)}(\alpha))^x$ となる $c \in Z(kC_G(P))\bar{b}(\gamma)$ が存在する。さらに、$x \in T$ より $\bar{b}(\gamma) = c_p \cdot \mathrm{Br}_P(\mathrm{Tr}_{Z(P)}^{C_G(P)}(\alpha))$ となる $c_p \in Z(kC_G(P))\bar{b}(\gamma)$ が取れる。このとき、$c_p \cdot \mathrm{Br}_P(\mathrm{Tr}_{Z(P)}^{C_G(P)}(\alpha)) = \mathrm{Tr}_{Z(P)}^{C_G(P)}(c_p \cdot \mathrm{Br}_P(\alpha))$ より、等式 (2.2.1) が得られる。 □

補題 2.2.1 より Higman 埋め込み $\lambda_P : kC_G(P)\bar{b}(\gamma) \to \mathrm{Ind}_{Z(P)}^{C_G(P)}(A_\gamma(P))$ は具体的に次で与えられる (式 (2.1.2) を参照)。

(2.2.7)
$$\lambda_P(d) = \sum_{x,y \in [C_G(P)/Z(P)]} x \otimes \overline{\overline{ja''}} x^{-1} dy c_p \overline{\overline{a'j}} \otimes y^{-1}$$

ここで、$d \in kC_G(P)\bar{b}(\gamma)$、$\bar{\bar{j}}\bar{b}(\gamma) = \bar{\bar{j}}$ に注意する。補題 2.2.1 における $c_p \in Z(kC_G(P))\bar{b}(\gamma)$ に対して、$\widehat{c_p}$ を次のように定める。

(2.2.8)
$$\widehat{c_p} = \sum_{x \in [C_G(P)/Z(P)]} x \otimes \bar{\bar{j}} c_p \bar{\bar{j}} \otimes x^{-1}$$

$\widehat{c_p}$ は $\mathrm{Ind}_{Z(P)}^{C_G(P)}(A_\gamma(P))$ における可逆元である。以後、$[C_G(P)/Z(P)]$ の代表元を固定する。

定理 2.2.2 図式-2.1.1 における記号のもと、$Q = P$ と仮定するとき、次の等式が成り立つ。

(2.2.9)

$$\widehat{\iota_0}\big(\lambda_P(\bar{b}(\gamma))\big) \cdot \mathrm{Br}_0(\lambda(b)) \cdot \widehat{\iota_0}\big(\lambda_P(\bar{b}(\gamma))\big)$$

$= \widehat{\iota_0}(\hat{c_p}^{-1}) \cdot \widehat{\iota_0}\big(\lambda_P(\bar{b}(\gamma))\big)$
$= \widehat{\iota_0}\big(\lambda_P(\bar{b}(\gamma))\big) \cdot \widehat{\iota_0}(\hat{c_p}^{-1})$

ここで、$\widehat{c_p}^{-1}$ は $\mathrm{Ind}_{Z(P)}^{C_G(P)}(A_\gamma(P))$ における上記 $\widehat{c_p}$ の逆元である。

[**証明**]　写像 $\lambda'_P : kC_G(P)\bar{b}(\gamma) \to \mathrm{Ind}_{Z(P)}^{C_G(P)}(A_\gamma(P))$ を次のように定める (元の取り方については (2.2.7) に従う)。

(2.2.10)

$$\lambda'_P(d) = \sum_{x,y\in[C_G(P)/Z(P)]} x \otimes \overline{\overline{ja''}} x^{-1} dy \overline{\overline{a'j}} \otimes y^{-1}$$

このとき、$\lambda_P(d) = \widehat{c_p}\lambda'_P(d) = \lambda'_P(d)\widehat{c_p}$ が成り立ち、次の等式が得られる。

(2.2.11)

$$\lambda_P(\bar{b}(\gamma))\lambda'_P(\bar{b}(\gamma))\lambda_P(\bar{b}(\gamma))$$
$$= \widehat{c_p}^{-1}\lambda_P(\bar{b}(\gamma)) = \lambda_P(\bar{b}(\gamma))\widehat{c_p}^{-1}$$

一般に、G の部分群 $H \leq K$ と H-多元環 B に対して、もし β、$\beta' \in \mathrm{Ind}_H^K(B)$ ならば、次が成り立つ。

(2.2.12)

$$\beta\Big(\sum_{x,y\in[G/H]} x \otimes_H v \otimes_H y^{-1}\Big)\beta'$$
$$= \beta\Big(\sum_{x,y\in[K/H]} x \otimes_H v \otimes_H y^{-1}\Big)\beta'$$

(2.2.12) を適用することにより、(2.1.2) と (2.2.7) および $\widehat{\iota_0}$ の定義から次の等式が得られる。

(2.2.13)

$$\widehat{\iota_0}\big(\lambda_P(\bar{b}(\gamma))\big) \cdot \mathrm{Br}_0(\lambda(b)) \cdot \widehat{\iota_0}\big(\lambda_P(\bar{b}(\gamma))\big)$$
$$= \widehat{\iota_0}\big(\lambda_P(\bar{b}(\gamma))\big) \cdot \widehat{\iota_0}\big(\lambda'_P(\bar{b}(\gamma))\big) \cdot \widehat{\iota_0}\big(\lambda_P(\bar{b}(\gamma))\big)$$

(2.2.11) と (2.2.13) より、等式 (2.2.9) が得られる。 □

2.3 $P \lhd G$ の場合（準備）

この節では、2.4 節の定理 2.4.2 を証明するために必要となる命題を示す。この節と次の節では P は G の正規部分群（これを $P \lhd G$ で表す)、$Q \neq 1$ は P の任意の部分群とする。また、上記の γ に対する $kC_G(P)$ のブロック $\bar{b}(\gamma)$ を $kPC_G(P)$ のブロックとみなす。

$PC_G(P) \lhd PC_G(Q)$ において、T を $\bar{b}(\gamma)$ の $PC_G(Q)$ における惰性群とする。すなわち、$T = \{x \in PC_G(Q) \mid \bar{b}(\gamma)^x = \bar{b}(\gamma)\}$ (2.2 節と同じ記号を用いる)。このとき、$\bar{b}(\gamma)$ が b の根より $e(\bar{b}(\gamma)) = |T : PC_G(P)| \not\equiv 0 \pmod p$ であること分かり、次の等式を得る。

(2.3.1)

$$\mathrm{Tr}_{PC_G(P)}^{PC_G(Q)}(\bar{b}(\gamma)) = \mathrm{Tr}_T^{PC_G(Q)}(\mathrm{Tr}_{PC_G(Q)}^T(\bar{b}(\gamma))$$
$$= e(\bar{b}(\gamma))\mathrm{Tr}_T^{PC_G(Q)}(\bar{b}(\gamma))$$

さらに、$\bar{b}(\gamma)^{PC_G(Q)} = \mathrm{Tr}_T^{PC_G(Q)}(\bar{b}(\gamma))$ は $kPC_G(Q)$ のブロックである。ここまでの議論については、[3] を参照。

一方、式 (2.2.1) より

(2.3.2)

$$\bar{b}(\gamma) = \mathrm{Tr}_{Z(P)}^{C_G(P)}(c_p \cdot \mathrm{Br}_P(a'ja''))$$
$$= \mathrm{Tr}_{Z(P)}^{C_G(P)}(c_p\overline{\overline{a'}}\bar{b}(\gamma) \cdot \overline{\overline{j}} \cdot \overline{\overline{a''}}\bar{b}(\gamma))$$

π、$\varpi \in \mathcal{O}C_G(P)b$ を次を満たす元とする。

(2.3.3)　$\mathrm{Br}_P(\pi) = c_p\overline{\overline{a'}}\bar{b}(\gamma)$、$\mathrm{Br}_P(\varpi) = \overline{\overline{a''}}\bar{b}(\gamma)$

このとき、$\mathrm{Tr}_{PC_G(P)}^{PC_G(Q)}(\bar{b}(\gamma))$ は次のように表される。

(2.3.4)

$$\mathrm{Tr}_{PC_G(P)}^{PC_G(Q)}(\bar{b}(\gamma)) = \mathrm{Tr}_{PC_G(P)}^{PC_G(Q)}(\mathrm{Tr}_P^{PC_G(P)}(\mathrm{Br}_P(\pi j\varpi)))$$
$$= \mathrm{Tr}_P^{PC_G(Q)}(\mathrm{Br}_P(\pi j\varpi))$$

そこで、ブロック $\bar{b}(\gamma)^{PC_G(Q)}$ は次のように表される。

(2.3.5)

$$\bar{b}(\gamma)^{PC_G(Q)} = e(\bar{b}(\gamma))^{-1}\mathrm{Tr}_P^{PC_G(Q)}(\mathrm{Br}_P(\pi j\varpi))$$

$j \in \gamma$ に対して、$j = \sum_{k=1}^m j_k + \sum_{k'=1}^{m'} j'_{k'}$ を次の条件を満たす $A^{QC_P(Q)} = (\mathcal{O}Gb)^{QC_P(Q)}$ における原始べき等元分解とする。

(2.3.6)

$\mathrm{Br}_{QC_P(Q)}(j_k) \neq 0$　　$(1 \leqq k \leqq m)$
$\mathrm{Br}_{QC_P(Q)}(j'_{k'}) = 0$　　$(1 \leqq k' \leqq m')$

上の条件をみたす j_k に対して、ε_k を j_k が属する A 上 $QC_P(Q)$ の局所ポイントとする（ε_k は異なるとは限らない)。[4] の 7 章の議論より、式 (1.2) における ε として ε_k（$1 \leqq k \leqq m$）の内の任意の 1 つを選ぶことができる（[2、4.1 節] 参照)。さらに、$\mathcal{J} = \sum_{k=1}^m j_k$ とおくと、(1.2) における $kC_G(Q)$

のブロック $\bar{b}(\delta)$ に対して次のことが成り立つことが分かる。

補題 2.3.1　上記の記号のもと、$C_P(Q)_{\mathrm{Br}_Q(\varepsilon_k)}$ は $kC_G(Q)\bar{b}(\delta)$ のポイント付き不足群である。さらに、$\bar{b}(\delta)\mathrm{Br}_Q(\mathcal{J}) = \mathrm{Br}_Q(\mathcal{J})\bar{b}(\delta) = \mathrm{Br}_Q(\mathcal{J})$ が成り立つ。

命題 2.3.2　上記の記号のもと、$\bar{b}(\delta)$ の次の表示を与える j_k $(1 \leqq k \leqq m)$ と $Z(kC_G(Q))\bar{b}(\delta)$ の可逆元 c_q が存在する。

(2.3.7)　$\bar{b}(\delta) = \mathrm{Tr}_{C_P(Q)}^{C_G(Q))}(c_q\bar{\pi}\bar{j_k}\bar{\varpi}))$

ここで、π、j_k、ϖ を A^Q の元とみなし、$\bar{\pi}$、$\bar{j_k}$、$\bar{\varpi}$ は Br_Q によるそれらの像である。さらに、(1.2) における Higman 埋め込み λ_Q は具体的に次で与えられる。$d \in kC_G(Q)\bar{b}(\delta)$ に対して、

(2.3.8)
$$\lambda_Q(d) = \sum_{x,y\in[C_G(Q)/C_P(Q)]} x \otimes \bar{j_k}\bar{\varpi}x^{-1}dyc_q\bar{\pi}\bar{j_k} \otimes y^{-1}$$

特に、$\bar{b}(\delta)$ の像は次で与えられる。

(2.3.9)
$$\lambda_Q(\bar{b}(\delta)) = \sum_{x,y\in[C_G(Q)/C_P(Q)]} x \otimes \bar{j_k}\bar{\varpi}x^{-1}yc_q\bar{\pi}\bar{j_k} \otimes y^{-1}$$

ここで、$\otimes = \otimes_{C_P(Q)}$ である。

[**証明**]　$\mathcal{O}G$ 上 P、$QC_P(Q)$、Q についての Brauer 準同型をそれぞれ Br_P、$\mathrm{Br}_{QC_P(Q)}$、Br_Q で表す（ここで、Br_Q は A 上 Q の Brauer 準同型と同じ記号を用いる)。また、次の Brauer 準同型を考える。

(2.3.10)
$$\mathrm{Br}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)} : (kC_G(Q))^{C_P(Q)} \to kC_G(QC_P(Q))$$

このとき、$(\mathcal{O}G)^{QC_P(Q)}$ 上 $\mathrm{Br}_{QC_P(Q)} = \mathrm{Br}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)} \circ \mathrm{Br}_Q$ が成り立つ。また $(\mathcal{O}G)^P$ において $\mathrm{Br}_{P,QC_P(Q)}\circ \mathrm{Br}_{QC_P(Q)} = \mathrm{Br}_P$ となるような次の k-多元環準同型が存在する（[1、命題 1.5] 参照)。

(2.3.11)
$$\mathrm{Br}_{P,QC_P(Q)} : \mathrm{Br}_{QC_P(Q)}((\mathcal{O}G)^P) \to kC_G(P)$$

ところで、$x \in C_G(Q)$ に対して、$P \lhd G$ より、$(\pi j\varpi)^x \in (\mathcal{O}G)^P$ となることから、次の等式が得られる。

(2.3.12)
$$\mathrm{Br}_{P,QC_P(Q)} \circ \mathrm{Br}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)} \circ \mathrm{Br}_Q((\pi j\varpi)^x)$$
$$= \mathrm{Br}_P((\pi j\varpi)^x) = \mathrm{Br}_P(\pi j\varpi)^x$$

また、式 (2.3.6) から $\mathrm{Br}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)}\circ\mathrm{Br}_Q(j) = \mathrm{Br}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)}\circ \mathrm{Br}_Q(\mathcal{J})$ であることより、次の等式が得られる。

(2.3.13)
$$\mathrm{Br}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)}\circ\mathrm{Br}_Q\big((\pi j\varpi)^x\big) = \mathrm{Br}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)}\circ\mathrm{Br}_Q\big((\pi \mathcal{J}\varpi)^x\big)$$

そこで、$\Gamma = \mathrm{Tr}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)}\big(\mathrm{Br}_Q(\pi\mathcal{J}\varpi)\big) \in Z(kC_G(Q))$ とおくと、式 (2.3.12) と (2.3.13) より次が得られる。

(2.3.14)
$$\mathrm{Br}_{P,QC_P(Q)} \circ \mathrm{Br}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)}(\Gamma) = \mathrm{Tr}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)}(\mathrm{Br}_P(\pi j\varpi))$$
$$= \mathrm{Tr}_P^{PC_G(Q)}(\mathrm{Br}_P(\pi j\varpi))$$

さらに、式 (2.3.5) と (2.3.14) より

(2.3.15)
$$\bar{b}(\gamma)^{PC_G(Q)} = \mathrm{Br}_{P,QC_P(Q)} \circ \mathrm{Br}_{C_P(Q)}^{C_P(Q)}(e(\bar{b}(\gamma))^{-1}\Gamma)$$

が得られる。補題 2.3.1 と (2.3.15) より、Γ が局所環 $Z(kC_G(Q))\bar{b}(\delta)$ における可逆元であることが分かる。よって、$\mathcal{J} = \sum_{k=1}^m j_k$ における、ある j_k について $\mathrm{Tr}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)}(\mathrm{Br}_Q(\pi j_k\varpi))$ は $Z(kC_G(Q))\bar{b}(\delta)$ の可逆元であり、次の等式を満たす $c_q \in Z(kC_G(Q))\bar{b}(\delta)$ が存在する。

(2.3.16)
$$\bar{b}(\delta) = \mathrm{Tr}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)}(c_q\mathrm{Br}_Q(\pi j_k\varpi)) = \mathrm{Tr}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)}(c_q\bar{\pi}\bar{j_k}\bar{\varpi})$$

さらに、[5] の定理 17.1 より、この等式から (2.3.8) が導かれることが分かる。 □

2.4 $P \lhd G$ の場合（定理の証明）

以下の定理 2.4.2 は、条件 $P \lhd G$ のもとで定理 2.2.2 の類似結果が得られることを示す。また、この節では $\otimes = \otimes_{C_P(Q)}$ の意味である。

この節でも 2.1 節で導入した記号を用いる。特に、ブロック b は $b = \mathrm{Tr}_P^G(a'ja'')$（ここで、$j \in \gamma$ そして a'、$a'' \in A^P$ ）と表される。式 (2.2.12) と [2、命題 4.2.1] を適用することにより、(2.3.9) の $\lambda_Q(\bar{b}(\delta))$ に対して (2.2.13) と同様な次の関係式が得られることが分かる。

(2.4.1)
$$\widehat{\iota_0}\big(\lambda_Q(\bar{b}(\delta))\big) \cdot \mathrm{Br}_0(\lambda(b)) \cdot \widehat{\iota_0}\big(\lambda_Q(\bar{b}(\delta))\big)$$

$= \widehat{\iota_0}\big(\lambda_Q(\bar{b}(\delta))\big) \cdot \widehat{\iota_0}\big(\lambda'_Q(\bar{b}(\delta))\big) \cdot \widehat{\iota_0}\big(\lambda_Q(\bar{b}(\delta))\big)$

ここで、$\lambda'_Q(\bar{b}(\delta))$ は式 (2.2.10) と同様に次で定める。

(2.4.2)

$$\lambda'_Q(\bar{b}(\delta)) = \sum_{x,y \in [C_G(Q)/C_P(Q)]} x \otimes \overline{ja''}x^{-1}y\overline{a'j} \otimes y^{-1}$$

以後、$\lambda_Q(\bar{b}(\delta))$ と $\lambda'_Q(\bar{b}(\delta))$ の関連を調べる。また、2.1 節で注意したように、Q と P に関する Brauer 準同型による像をそれぞれ、$\mathrm{Br}_Q(a)$ または $\bar{a}$、$\mathrm{Br}_P(a)$ または $\bar{\bar{a}}$ で表す。

マルティプリシティー多元環について、次の可換図式が得られる（[5、命題 15.3] 参照)。

$$\begin{tikzcd}
A_\gamma(Q) \arrow[r, "\eta_1"] \arrow[d, "s"'] & \mathrm{Ind}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)}(A_\gamma(Q)) \arrow[d, "\hat{s}"] \\
A_\gamma(Q)(\bar{\delta}) \arrow[r, "\eta_2"] & \mathrm{Ind}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)}(A_\gamma(Q))(\hat{\bar{\delta}})
\end{tikzcd}$$

図式-2.4.1

ここで、η_1 は標準的な埋め込み、η_2 は η_1 から導かれるインテリア多元環としての埋め込みである。また、$\bar{\delta}$、$\hat{\bar{\delta}}$ はそれぞれ $\mathrm{Br}_Q(\delta)$、$\eta_1(\mathrm{Br}_Q(\delta))$ によって定まる $A_\gamma(Q)$、$\mathrm{Ind}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)}(A_\gamma(Q))$ のポイントを表す（$A_\gamma(Q) \hookrightarrow kC_G(Q)$ が埋め込みより、$\bar{\delta}$ は $kC_G(Q)$ のポイントでもある)。さらに、$A_\gamma(Q)(\bar{\delta})$、$\mathrm{Ind}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)}(A_\gamma(Q))(\hat{\bar{\delta}})$ はそれらに関するマルティプリシティー多元環であり、s と $\hat{s}$ はマルティプリシティー多元環への商写像を表す。そこで $\lambda_Q(\bar{b}(\delta)) \in \mathrm{Ind}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)}(A_\varepsilon(Q)) \subset \mathrm{Ind}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)}(A_\gamma(Q))$ についての式 (2.3.9) より次が得られる。

(2.4.3)

$$\hat{s}\big(\lambda_Q(\bar{b}(\delta))\big)$$

$$= \hat{s}\Big(\sum_{x,y \in [C_G(Q)/C_P(Q)]} x \otimes \bar{j_k}\bar{\varpi}x^{-1}yc_q\bar{\pi}\bar{j_k} \otimes y^{-1}\Big)$$

$$= \sum_{x,y \in [C_G(Q)/C_P(Q)]} x\hat{s}\big(\eta_1(\bar{j_k}\bar{\varpi}x^{-1}yc_q\bar{\pi}\bar{j_k})\big)y^{-1}$$

$$= \sum_{x,y \in [C_G(Q)/C_P(Q)]} x\eta_2\big(s(\bar{j_k}\bar{\varpi}x^{-1}yc_q\bar{\pi}\bar{j_k})\big)y^{-1}$$

補題 2.4.1　上記の記号のもと次が成り立つ。

(1)　以下の (2.4.4) における 3 つのマルティプリシティー多元環への商写像について、$\mathcal{S}_{|A_\gamma(Q)} = s$ および $\mathcal{S}_{|A_\gamma(P)} = s'$ が成り立つ。ここで、$\bar{\bar{\gamma}}$ は $\mathrm{Br}_P(\gamma)$ が定める $A_\gamma(P)$ 上のポイント、$\mathcal{S}_{|A_\gamma(Q)}$ と $\mathcal{S}_{|A_\gamma(P)}$ は $\mathcal{S}$ の $A_\gamma(Q)$、$A_\gamma(P)$ への制限写像を表す。

(2.4.4)

$\mathcal{S} : kC_G(Q) \to kC_G(Q)(\bar{\delta})$

$s : A_\gamma(Q) \to A_\gamma(Q)(\bar{\delta})$

$s' : A_\gamma(P) \to A_\gamma(P)(\bar{\bar{\gamma}}) = k$

(2)　$j \in \gamma$ に対する $\mathrm{Br}_Q(j)$ と k-多元環準同型 $\mathrm{Br}_{P,Q} : \mathrm{Br}_Q((\mathcal{O}G)^P) \to kC_G(P)$ について、次の等式が成り立つ。ここで、$\mathrm{Br}_{P,Q}$ は (2.3.11) と同様に [1、命題 1.5] で与えられる準同型、$Ker\mathrm{Br}_{P,Q}$ は $\mathrm{Br}_{P,Q}$ の核を表す。

(2.4.5)

$\mathcal{S}(\mathrm{Br}_Q(j) \cdot Ker\mathrm{Br}_{P,Q}) = \mathcal{S}(Ker\mathrm{Br}_{P,Q} \cdot \mathrm{Br}_Q(j)) = 0$

[**証明**]　環 D の Jacobson 根基を $J(D)$ で表す。

(1)　$A_\gamma(Q) = \bar{j}kC_G(Q)\bar{j}$ であるから、$J(A_\gamma(Q)) = \bar{j}J(kC_G(Q)\bar{j}$ 。よって、$J(A_\gamma(Q)) = \bar{j}kC_G(Q)\bar{j} \cap J(kC_G(Q))$ となり、多元環としての次の包含が得られる。

(2.4.6)　$A_\gamma(Q)/J(A_\gamma(Q)) \subset kC_G(Q)/J(kC_G(Q))$

$\mathcal{M}_{\bar{\delta}}$ をポイント $\bar{\delta}$ に対応して定まる $kC_G(Q)$ の極大両側イデアル、$\widetilde{\mathcal{M}_{\bar{\delta}}}$ を $kC_G(Q) \to kC_G(Q)/J(kC_G(Q))$ による $\mathcal{M}_{\bar{\delta}}$ の像とする。同様に、$\mathcal{N}_{\bar{\delta}}$ をポイント $\bar{\delta}$ に対応して定まる $A_\gamma(Q)$ の極大両側イデアル、$\widetilde{\mathcal{N}_{\bar{\delta}}}$ を $A_\gamma(Q) \to A_\gamma(Q)/J(A_\gamma(Q))$ による $\mathcal{N}_{\bar{\delta}}$ の像とする。このとき、半単純環の単純環への分解を用いて、$\widetilde{\mathcal{N}_{\bar{\delta}}} = \big(A_\gamma(Q)/J(A_\gamma(Q))\big) \cap \widetilde{\mathcal{M}_{\bar{\delta}}}$ となることが分かる。このことより、$\mathcal{N}_{\bar{\delta}} = A_\gamma(Q) \cap \mathcal{M}_{\bar{\delta}}$、つまり、多元環としての次の包含が得られる。

(2.4.7)　$A_\gamma(Q)/\mathcal{N}_{\bar{\delta}} \subset kC_G(Q)/\mathcal{M}_{\bar{\delta}}$

これは、$\mathcal{S}_{|A_\gamma(Q)} = s$ となることを意味する。

次に $\mathcal{S}_{|A_\gamma(P)} = s'$ を示す。仮定 $P \lhd G$ より、$C_G(P) \lhd C_G(Q)$ である。そこで、任意の $x \in C_G(Q)$ に対して、$J(kC_G(P))^x = J(kC_G(P))$ となることより、$kC_G(Q)J(kC_G(P))$ は $kC_G(Q)$ のべき零イデアルである。ゆえに $J(kC_G(P)) \subset J(kC_G(Q))$、さらに、次の包含関係が得られる。

(2.4.8) $J(A_\gamma(P)) = \bar{\bar{j}}J(kC_G(P))\bar{\bar{j}} \subset J(kC_G(Q))$

そこで、$\bar{\delta}$ に対応して定まる $kC_G(Q)$ の極大両側イデアル $\mathcal{M}_{\bar{\delta}}$ に対して、$J(A_\gamma(P)) \subset A_\gamma(P) \cap \mathcal{M}_{\bar{\delta}}$ である。ところで、$A_\gamma(P)$ が局所環より、この包含は $A_\gamma(P) \cap \mathcal{M}_{\bar{\delta}} = J(A_\gamma(P))$ または $A_\gamma(P) \cap \mathcal{M}_{\bar{\delta}} = A_\gamma(P)$ となることを意味する。以下、$A_\gamma(P) \cap \mathcal{M}_{\bar{\delta}} = A_\gamma(P)$ とすると矛盾が生じることを示す。$\mathrm{Br}_P(j)$ を $\mathrm{Br}_Q((\mathcal{O}G)^P)$ におけるべき等元とみる。このとき、$j'\mathrm{Br}_P(j) = \mathrm{Br}_P(j)j' = j'$ となる $\mathrm{Br}_Q((\mathcal{O}G)^P)$ における原始べき等元 j' で、$\mathrm{Br}_{P,Q}(j') = \mathrm{Br}_P(j)$ となるものが存在する。$\mathrm{Br}_Q(j)$ も $\mathrm{Br}_{P,Q}(\mathrm{Br}_Q(j)) = \mathrm{Br}_P(j)$ となる $\mathrm{Br}_Q((\mathcal{O}G)^P)$ の原始べき等元である。よって、$j' = \mathrm{Br}_Q(j)^a$ となる $\mathrm{Br}_Q((\mathcal{O}G)^P)$ における可逆元 a が存在する。そこで $\mathrm{Br}_P(j)\mathrm{Br}_Q(j)^a = \mathrm{Br}_Q(j)^a$ となり、$\mathrm{Br}_P(j)\mathrm{Br}_Q(d)^a = \mathrm{Br}_Q(d)^a$ となる $d \in \delta$ がとれる。よって、$A_\gamma(P) \cap \mathcal{M}_{\bar{\delta}} = A_\gamma(P)$ ならば、$\mathcal{M}_{\bar{\delta}} \ni \mathrm{Br}_Q(d)^a$（$a$ は $kC_G(Q)^\times$ の元でもある）となり、これは $\mathcal{M}_{\bar{\delta}}$ の取り方に反する。以上の議論より、$A_\gamma(P) \cap \mathcal{M}_{\bar{\delta}} = J(A_\gamma(P))$ であり、多元環としての次の包含が得られる。

(2.4.9) $A_\gamma(P)/J(A_\gamma(P)) \subset kC_G(Q)/\mathcal{M}_{\bar{\delta}}$

これは、$\mathcal{S}_{|A_\gamma(P)} = s'$ となることを意味する。

(2) $\mathrm{Br}_Q((\mathcal{O}G)^P) \subset kC_G(Q)$ について、$P \lhd G$ より任意の $x \in C_G(Q)$ に対して、$x^{-1}\mathrm{Br}_Q((\mathcal{O}G)^P)x = \mathrm{Br}_Q((\mathcal{O}G)^P)$ が成り立つ。よって、両側イデアル $kC_G(Q)J(\mathrm{Br}_Q((\mathcal{O}G)^P))$ はべき零イデアルとなり、$J\big(\mathrm{Br}_Q((\mathcal{O}G)^P)\big) = \mathrm{Br}_Q((\mathcal{O}G)^P) \cap J(kC_G(Q))$ となる。そこで多元環としての次の包含が得られる。

(2.4.10)
$$\mathrm{Br}_Q((\mathcal{O}G)^P)/J\big(\mathrm{Br}_Q((\mathcal{O}G)^P)\big) \subset kC_G(Q)/J(kC_G(Q))$$

$\mathrm{Br}_Q((\mathcal{O}G)^P)/J(\mathrm{Br}_Q((\mathcal{O}G)^P)) = R_1 \oplus R_2 \oplus \cdots \oplus R_n$ を半単純環の単純環への直和分解とし、R_1 を原始べき等元 $\overline{\mathrm{Br}_Q(j)}$ が属する因子とする。ここで、$\overline{\mathrm{Br}_Q(j)}$ は $\mathrm{Br}_Q(j)$ の $\mathrm{Br}_Q((\mathcal{O}G)^P)/J(\mathrm{Br}_Q((\mathcal{O}G)^P))$ への像である。このとき、(1) の証明における $\widetilde{\mathcal{M}_{\bar{\delta}}}$ に対して次が成り立つ。

(2.4.11)
$$\mathrm{Br}_Q((\mathcal{O}G)^P)/J(\mathrm{Br}_Q((\mathcal{O}G)^P)) \cap \widetilde{\mathcal{M}_{\bar{\delta}}} = (R_1 \cap \widetilde{\mathcal{M}_{\bar{\delta}}}) \oplus (R_2 \cap \widetilde{\mathcal{M}_{\bar{\delta}}}) \oplus \cdots \oplus (R_n \cap \widetilde{\mathcal{M}_{\bar{\delta}}}$$

ここで、$R_1 \cap \widetilde{\mathcal{M}_{\bar{\delta}}} = 0$ となる。さらに、$\overline{\mathrm{Br}_Q(j)} \cdot \overline{Ker\mathrm{Br}_{P,Q}} \subset R_1$ より、次が得られる。

(2.4.12)
$$\mathcal{S}(\mathrm{Br}_Q(j) \cdot Ker\mathrm{Br}_{P,Q}) = \overline{\mathrm{Br}_Q(j)} \cdot \overline{Ker\mathrm{Br}_{P,Q}}$$

ここで $\overline{Ker\mathrm{Br}_{P,Q}}$ は $\mathrm{Br}_Q((\mathcal{O}G)^P)/J(\mathrm{Br}_Q((\mathcal{O}G)^P))$ における $Ker\mathrm{Br}_{P,Q}$ の像である。e_1 を R_1 に対応する $\mathrm{Br}_Q((\mathcal{O}G)^P)/J(\mathrm{Br}_Q((\mathcal{O}G)^P))$ の中心的原始べき等元とする。このとき、

(2.4.13) $\overline{\mathrm{Br}_Q(j)} \cdot \overline{Ker\mathrm{Br}_{P,Q}} \subset e_1\overline{Ker\mathrm{Br}_{P,Q}}$

さらに、$e_1\overline{Ker\mathrm{Br}_{P,Q}}$ は単純環 R_1 の両側イデアルである。もし $\overline{\mathrm{Br}_Q(j)} \in e_1\overline{Ker\mathrm{Br}_{P,Q}}$ とすると、$\mathrm{Br}_Q(j) \in Ker\mathrm{Br}_{P,Q}$ となり矛盾。よって $e_1\overline{Ker\mathrm{Br}_{P,Q}} = 0$ であり、$\mathcal{S}(\mathrm{Br}_Q(j) \cdot Ker\mathrm{Br}_{P,Q}) = 0$ を示すことができる。 □

以後この節の最後まで $\mathcal{R} = [C_G(Q)/C_P(Q)]$ とおく。式 (2.4.3) における $\bar{\pi}$、$\bar{\varpi}$ について、π、ϖ のとり方より $\bar{\pi} = \bar{\bar{\pi}} = \bar{\bar{a}}'c_p\bar{b}(\gamma)$、$\bar{\varpi} = \bar{\bar{\varpi}} = \bar{\bar{a}}''\bar{b}(\gamma)$ であり、(2.4.3) は次のように表される。ここで、$\bar{j}_k\bar{b}(\gamma) = \bar{j}_k$ に注意することによって最初の等号が得られる。さらに、2 番目の等号については補題 2.4.1 の (1) を適用する。

(2.4.14)
$$\begin{aligned}&\hat{s}\big(\lambda_Q(\bar{b}(\delta))\big)\\ &= \sum_{x,y\in\mathcal{R}} x\eta_2(s(\bar{j}_k\bar{\bar{a}}''x^{-1}yc_q\bar{\bar{a}}'c_p\bar{j}_k))y^{-1}\\ &= \sum_{x,y\in\mathcal{R}} x\eta_2(\mathcal{S}(\bar{j}_k\bar{\bar{a}}''x^{-1}yc_q\bar{\bar{a}}')\cdot\mathcal{S}(c_p)\cdot\mathcal{S}(\bar{j}_k))y^{-1}\end{aligned}$$

さらに π の取り方に注意する。$\mathrm{Br}_P(\pi) = c_p\bar{\bar{a}}'\bar{b}(\gamma) = \bar{\bar{a}}'\bar{b}(\gamma)c_p$、ここで、$c_p$ を $\bar{\bar{j}}c_p\bar{\bar{j}}$ で置き換えてもここまでに議論に影響がない。そこで、補題 2.4.1 の (1) から $\mathcal{S}(c_p) = s'(c_p) = w \in k^\times$ となる。$c = wc_q \in \big(Z(kC_G(Q)\bar{b}(\delta))^\times$ とおくと、式 (2.4.14) は次のように表される。

(2.4.15)
$$\begin{aligned}&\hat{s}\big(\lambda_Q(\bar{b}(\delta))\big)\\ &= \sum_{x,y\in\mathcal{R}} x\eta_2\big(\mathcal{S}(\bar{j}_k)\mathcal{S}(\bar{j}\bar{\bar{a}}'')\mathcal{S}(x^{-1}yc)\mathcal{S}(\bar{\bar{a}}'\bar{j})\mathcal{S}(\bar{j}_k)\big)y^{-1}\end{aligned}$$

一方、c に対して $\hat{c}$、$\hat{c}^{-1} \in \mathrm{Ind}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)}(A_{\varepsilon_k}(Q))$ を

次のように定める（c^{-1} は c の逆元)。

(2.4.16)

$$\hat{c} = \sum_{x\in\mathcal{R}} x\otimes\bar{j}_k c\otimes x^{-1}、\quad \hat{c}^{-1} = \sum_{x\in\mathcal{R}} x\otimes\bar{j}_k c^{-1}\otimes x^{-1}$$

このとき、$\hat{c}\hat{c}^{-1} = \hat{c}^{-1}\hat{c} = \sum_{x\in\mathcal{R}} x\otimes\bar{j}_k\otimes x^{-1}$ となる。

さらに、$\lambda_Q(\bar{b}(\delta))\hat{c}\hat{c}^{-1} = \hat{c}\hat{c}^{-1}\lambda_Q(\bar{b}(\delta)) = \lambda_Q(\bar{b}(\delta))$ が成り立つ。そこで、$\lambda_Q(\bar{b}(\delta))$ と $\lambda'_Q(\bar{b}(\delta))$ の関連について、次が得られる（式 (2.4.2) 参照)。

(2.4.17)

$$\lambda_Q(\bar{b}(\delta))\lambda'_Q(\bar{b}(\delta))\lambda_Q(\bar{b}(\delta))$$
$$= \lambda_Q(\bar{b}(\delta))\hat{c}^{-1}\hat{c}\lambda'_Q(\bar{b}(\delta))\lambda_Q(\bar{b}(\delta))$$
$$= \hat{c}^{-1}\lambda_Q(\bar{b}(\delta))\Big(\sum_{x,y\in\mathcal{R}} x\otimes\overline{j_k j a''}x^{-1}yc\overline{a' j j_k}\otimes y^{-1}\Big)\lambda_Q(\bar{b}(\delta))$$

(2.4.17) における最後の式の $\hat{s}$ による像をとるとき、$\sum_{x,y\in\mathcal{R}} x\otimes\overline{j_k j a''}x^{-1}yc\overline{a' j j_k}\otimes y^{-1}$ 対して図式-2.4.1 の可換性、補題 2.4.1 と 式 (2.4.15) より次の等式が成り立つ。特に、補題 2.4.1 の (2) より、$\mathcal{S}(\overline{ja''}) = \mathcal{S}(\bar{j}\bar{\bar{a}}'')$ および $\mathcal{S}(\overline{a'j}) = \mathcal{S}(\bar{\bar{a}}'\bar{j})$ が成り立つことに注意する。

(2.4.18)

$$\hat{s}\Big(\sum_{x,y\in\mathcal{R}} x\otimes\overline{j_k j a''}x^{-1}yc\overline{a' j j_k}\otimes y^{-1}\Big)$$
$$= \sum_{x,y\in\mathcal{R}} x\eta_2\big(\mathcal{S}(\bar{j}_k)\mathcal{S}(\overline{ja''})\mathcal{S}(x^{-1}yc)\mathcal{S}(\overline{a'j})\mathcal{S}(\bar{j}_k)\big)y^{-1}$$
$$= \hat{s}\big(\lambda_Q(\bar{b}(\delta))\big)$$

式 (2.4.17) と (2.4.18) より次の等式が得られる。

(2.4.19)

$$\hat{s}(\lambda_Q(\bar{b}(\delta)))\hat{s}\big(\lambda'_Q(\bar{b}(\delta))\big)\hat{s}(\lambda_Q(\bar{b}(\delta)))$$
$$= \hat{s}(\hat{c}^{-1})\hat{s}\big(\lambda_Q(\bar{b}(\delta))\big)$$

また、$\hat{c}\hat{c}^{-1}$ を (2.4.17) の最初の式において$\lambda'_Q(\bar{b}(\delta))$ の後ろに入れることによって、次の等式も得られる。

(2.4.20)

$$\hat{s}(\lambda_Q(\bar{b}(\delta)))\hat{s}\big(\lambda'_Q(\bar{b}(\delta))\big)\hat{s}(\lambda_Q(\bar{b}(\delta)))$$
$$= \hat{s}\big(\lambda_Q(\bar{b}(\delta))\big)\hat{s}(\hat{c}^{-1})$$

マルティプリシティー多元環について、次の可換図式が得られる。

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ind}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)}(A_\gamma(Q)) \arrow[r, "\iota_0"] \arrow[d, "\widehat{s}"'] & \mathrm{Ind}_P^G(A_\gamma)(Q) \arrow[d, "\widetilde{s}"] \\
\mathrm{Ind}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)}(A_\gamma(Q))(\widehat{\bar{\delta}}) \arrow[r, "\iota'_0"'] & \Big(\mathrm{Ind}_P^G(A_\gamma)(Q)\Big)(\widetilde{\bar{\delta}})
\end{tikzcd}$$

図式-2.4.2

ここで、ι_0 は [2、命題 3.2.1] によって与えられる $kC_G(Q)$-インテリア多元環としての埋め込み。$\widehat{\bar{\delta}}$ は、図式-2.4.1 における $\eta_1(\mathrm{Br}_Q(\delta))$ によって定まるポイント、$\widetilde{\bar{\delta}}$ は $\iota_0\circ\eta_1(\mathrm{Br}_Q(\delta))$ によって定まるポイントである。$\widehat{s}$、$\widetilde{s}$ はマルティプリシティー多元環への商写像を表す。さらに、ι'_0 は ι_0 から導かれる $kC_G(Q)$-インテリア多元環としての埋め込みである。

式 (2.4.1) における $\widehat{\iota_0}$ は包含写像 $\mathrm{Ind}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)}(A_\varepsilon(Q)) \subset \mathrm{Ind}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)}(A_\gamma(Q))$ と ι_0 の合成であることに注意すると、式 (2.4.1)、(2.4.19)、(2.4.20) および図式-2.4.2 の可換性より、次の定理が得られる。

定理 2.4.2 $P\lhd G$ とする。このとき、上の記号のもとで、次の等式が成り立つ。

(2.4.21)

$$\widetilde{s}\Big(\widehat{\iota_0}\big(\lambda_Q(\bar{b}(\delta))\big)\cdot\mathrm{Br}_0(\lambda(b))\cdot\widehat{\iota_0}\big(\lambda_Q(\bar{b}(\delta))\big)\Big)$$
$$= \widetilde{s}\Big(\widehat{\iota_0}(\hat{c}^{-1})\cdot\widehat{\iota_0}\big(\lambda_Q(\bar{b}(\delta))\big)\Big)$$
$$= \widetilde{s}\Big(\widehat{\iota_0}\big(\lambda_Q(\bar{b}(\delta))\big)\cdot\widehat{\iota_0}(\hat{c}^{-1})\Big)$$

注意 2.4.3 [4、7 章] のポイント付き部分群の取り方より、次の包含関係が成り立つ。

(2.4.22) $\quad Q_\delta \subset QC_P(Q)_\varepsilon \subset P_\gamma$

そこで、次の包含関係をみたすこれらのポイント付き部分群に関する A の局所化を取ることができる。

(2.4.23) $\quad A_\delta \subset A_\varepsilon \subset A_\gamma$

この包含関係に注意すると、Higman 埋め込みと埋め込み $\widehat{\iota_0}$ の定義より、図式-2.1.1 から 次の可換図式が導かれる。

$$\begin{tikzcd}
A_\delta^Q \arrow[rr, "\lambda"] \arrow[d, "\mathrm{Br}_Q"'] & & 1 \otimes_P A_\delta^Q \otimes_P 1 \arrow[d, "\mathrm{Br}_0"] \\
A_{\bar{\delta}}(Q) \arrow[d, equal] & & \mathrm{Br}_0(1 \otimes_P A_\delta^Q \otimes_P 1) \\
A_{\bar{\delta}}(Q) \arrow[r, "\lambda_Q"] & 1 \otimes_{C_P(Q)} A_{\bar{\delta}}(Q) \otimes_{C_P(Q)} 1 \arrow[ur, "\widehat{\iota_0}"'] &
\end{tikzcd}$$

図式-2.4.3

ここで、$\bar{\delta}$ は図式-2.4.1 における $\mathrm{Br}_Q(\delta)$ によって定まる $A(Q)$ のポイントである。また、Higman 埋め込み λ と λ_Q の A_δ^Q と $A_{\bar{\delta}}(Q)$、それぞれへの制限は標準的な埋め込みである。

図式-2.4.3 の可換性より、$\mathrm{Br}_0 \circ \lambda(\delta)$ が定める $\mathrm{Ind}_P^G(A_\gamma)(Q)$ のポイントと、図式-2.4.2 におけるポイント $\tilde{\tilde{\delta}}$ が一致することが分かる。すなわち、定理 2.4.2 における $\widetilde{s}$ は図式-2.1.1 において自然に定まるポイント $\mathrm{Br}_0 \circ \lambda(\delta)$ に関するマルティプリシティー多元環への商写像である。

3. Puig 同値

3.1 この章のための準備

ブロック多元環 $A = \mathcal{O}Gb$ と $A' = \mathcal{O}G'b'$ の間の森田同値を導く直既約 $\mathcal{O}(G \times G')$-加群 M の $\mathcal{O}\ddot{P}$-ソース加群 N が自明な加群（すなわち、$N \cong \mathcal{O}$）のとき、A と A' は Puig 同値であるという。[4] の系 7.4 で示されているように、Puig 同値はベーシック森田同値である。M が A と A' の間の Puig 同値を導くとき、1 章で導入した記号にしたがって、Q は b の不足群 P の任意の部分群、$\ddot{Q}$ は Q と対応する $\ddot{P}$ の部分群、Q' は b' の不足群 P' の部分群で Q と対応するものとする。さらに、A_γ と $A'_{\gamma'}$ 上の局所ポイント付き部分群 Q_δ と $Q'_{\delta'}$ によって定まる $kC_G(Q)$ のブロック $\bar{b}(\delta)$ と $kC_{G'}(Q')$ のブロック $\bar{b}(\delta')$ に対して、$\bar{b}(\delta)$ と $\bar{b}(\delta')$ の間の Puig 同値を導く直既約 $kC_{G\times G'}(\ddot{Q})$-加群を $M(Q_\delta)$ とする。この章では、M と $M(Q_\delta)$ の関係を調べる。

ソース加群が 置換加群となることと、自明な加群となることは同値である（置換群と p-置換加群の概念については、[2、2.1 節] 参照)。ここでは、まず p-置換加群に対して、1 章の (1.1) における ϕ と (1.2) における ϕ_Q を関連づける 3.2 節の可換図式-3.2.1 について考察し、それを用いて Puig 同値の場合の M と $M(Q_\delta)$ の間の関係を与える。

置換 $\mathcal{O}\ddot{P}$-加群 N に対して、次の $N_{G\times G'}(\ddot{Q})$-多元環としての同型が存在する（[5、命題 27.6] 参照)。

(3.1.1)

$$\mu : \mathrm{End}_{\mathcal{O}}\big(\mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{G\times G'}(N)\big)(\ddot{Q}) \cong \mathrm{End}_k\big(\mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{G\times G'}(N)(\ddot{Q})\big)$$

ここで、$\mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{G\times G'}(N)(\ddot{Q})$ は加群につての Brauer 商である（[2、2.1 節] 参照)。同型 (3.1.1) と [5、例 16.4] を適用することによって、次の 3 つの多元環同型が得られる。ここで、ϕ、ϕ_Q については記号の乱用となるが (1.1)、(1.2) と同じ記号を用いる。また、ϕ、ϕ_Q は $kC_{G\times G'}(\ddot{Q})$-インテリア多元環としての同型である。

(3.1.2)

$$\phi : \mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{G\times G'}(\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(N))^{\ddot{Q}} \cong \mathrm{End}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{G\times G'}(N))^{\ddot{Q}}$$

$$\tilde{\tilde{\phi}} : \mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{G\times G'}(\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(N))(\ddot{Q}) \cong \mathrm{End}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{G\times G'}(N))(\ddot{Q}) \xrightarrow[\cong]{\mu} \mathrm{End}_k(\mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{G\times G'}(N)(\ddot{Q}))$$

$$\phi_Q : \mathrm{Ind}_{C_{\ddot{P}}(\ddot{Q})}^{C_{G\times G'}(\ddot{Q})}\big(\mathrm{End}_k(N(Q_\delta))\big) \cong \mathrm{End}_k\big(\mathrm{Ind}_{C_{\ddot{P}}(\ddot{Q})}^{C_{G\times G'}(\ddot{Q})}(N(Q_\delta))\big)$$

さらに、次の多元環準同型が得られる。

(3.1.3)

$$\mathrm{Br}_{\ddot{Q}} : \mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{G\times G'}(\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(N))^{\ddot{Q}} \to \mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{G\times G'}(\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(N))(\ddot{Q})$$

$$(\mathrm{Br}_{\ddot{Q}})_E : \mathrm{End}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{G\times G'}(N))^{\ddot{Q}} \to \mathrm{End}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{G\times G'}(N))(\ddot{Q}) \xrightarrow[\cong]{\mu} \mathrm{End}_k(\mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{G\times G'}(N)(\ddot{Q}))$$

ここで、$\mathrm{Br}_{\ddot{Q}}$ は Brauer 準同型、$(\mathrm{Br}_{\ddot{Q}})_E$ における最初の準同型も Brauer 準同型である。

3.2 この章の主定理

上記の ϕ、$\tilde{\tilde{\phi}}$、ϕ_Q による基底の対応を具体的に求めることができる。特に、p-置換加群に対する基本性質（[5、27 節] 参照）から、$\tilde{\tilde{\phi}}$ の基底の対応が定まる。

$\mathcal{O}$-自由な $\mathcal{O}$-加群 W とその任意の基底 $\mathcal{W}$ に対

して、W の線形変換 $E^{W}_{u,v}$ を次の基底の対応で定める。ここで、u、$v \in \mathcal{W}$ であり、$\delta_{v,w}$ はクロネッカーの δ 記号である。

(3.2.1)
$E^{W}_{u,v} : \mathcal{W} \to \mathcal{W}$、 $E^{W}_{u,v}(w) = \delta_{v,w} u$

このとき、$\{E^{W}_{u,v} \mid u, v \in \mathcal{W}\}$ は $\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(W)$ の基底となる。

G の部分群 H と $\mathcal{O}H$-加群 V に対して、$\mathcal{V}$ を V の $\mathcal{O}$-基底とすると $\widehat{\mathcal{V}} = \{g \otimes u \mid g \in [G/H], u \in \mathcal{V}\}$（ここで、$\otimes = \otimes_{H}$）が誘導加群 $\mathrm{Ind}^{G}_{H}(V) = V^{G}$ の $\mathcal{O}$-基底より、$\{E^{V^G}_{g\otimes u, h\otimes v} \mid g \otimes u, h \otimes v \in \widehat{\mathcal{V}}\}$ は $\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Ind}^{G}_{H}(V))$ の $\mathcal{O}$-基底となる。その一方、$\{g \otimes E^{V}_{u,v} \otimes h^{-1} \mid g, h \in [G/H], u, v \in \mathcal{V}\} = \{g \otimes E^{V}_{u,v} \otimes h^{-1} \mid g \otimes u, h \otimes v \in \widehat{\mathcal{V}}\}$（ここで、$\otimes = \otimes_{H}$）は $\mathrm{Ind}^{G}_{H}(\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(V))$ の $\mathcal{O}$-基底となる。このとき、これらの基底の対応によって次の $\mathcal{O}G$-インテリア多元環としての同型が得られる。

(3.2.2)
$\mathrm{Ind}^{G}_{H}(\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(V)) \cong \mathrm{End}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Ind}^{G}_{H}(V))$:
$g \otimes E^{V}_{u,v} \otimes h^{-1} \mapsto E^{V^G}_{g\otimes u, h\otimes v}$

次に、p-置換加群の基本性質をまとめる。有限群 G の p-部分群 Q と p-置換 $\mathcal{O}G$-加群 W に対して、$\mathcal{W}$ を W の Q-不変な $\mathcal{O}$-基底（すなわち、任意の $q \in Q$ と $w \in \mathcal{W}$ について $qv \in \mathcal{W}$）とする。さらに、$\mathcal{W}^{Q}$ を $\mathcal{W}$ における Q-固定元（すなわち、任意の $q \in Q$ について $qw = w$ となる $\mathcal{W}$ の元 w）の集合とする。このとき、$\{\overline{E^{W}_{u,v}} \mid u, v \in \mathcal{W}^{Q}\}$ は $\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(W)(Q)$ の k-基底である（ここで、$\overline{E^{W}_{u,v}}$ は Brauer 準同型による $E^{W}_{u,v}$ の像)。また、$\{E^{W(Q)}_{\bar{u},\bar{v}} \mid u, v \in \mathcal{W}^{Q}\}$ は $\mathrm{End}_{k}(W(Q))$ の k-基底となる（ここで、$\bar{u}$、$\bar{v}$ は Brauer 準同型による u、v の像である)。このとき、基底の対応によって次の同型が得られる。

(3.2.3)
$\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(W)(Q) \cong \mathrm{End}_{k}(W(Q))$: $\overline{E^{W}_{u,v}} \mapsto E^{W(Q)}_{\bar{u},\bar{v}}$

さらに、G の部分群 H、$H \geq Q$、と置換 $\mathcal{O}H$-加群 V に対して、$\mathcal{V}$ を H-不変な V の $\mathcal{O}$-基底とすると $\widehat{\mathcal{V}} = \{g \otimes u \mid g \in [G/H], u \in \mathcal{V}\}$ も H-不変よって Q-不変となり、次の同型が得られる。

(3.2.4)
$\mathrm{Ind}^{G}_{H}(\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(V))(Q) \cong \mathrm{End}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Ind}^{G}_{H}(V))(Q)$:
$\overline{g \otimes E^{V}_{u,v} \otimes h^{-1}} \mapsto \overline{E^{V^G}_{g\otimes u, h\otimes v}}$

ここで、$\{\overline{g \otimes E^{V}_{u,v} \otimes h^{-1}} \mid g \otimes u, h \otimes v \in \widehat{\mathcal{V}}^{Q}\}$ は $\mathrm{Ind}^{G}_{H}(\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(V))(Q)$ の k-基底、$\{\overline{E^{V^G}_{g\otimes u, h\otimes v}} \mid g \otimes u, h \otimes v \in \widehat{\mathcal{V}}^{Q}\}$ は $\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Ind}^{G}_{H}(V))(Q)$ の k-基底である。

次の可換図式が得られる。図式において $\mathrm{E}_{\mathcal{O}}$ は $\mathrm{End}_{\mathcal{O}}$、$\mathrm{E}_{k}$ は End_{k} を表す。さらに、(3.1.2) の記号のもとで、$\widehat{\iota_E}$ を $\widehat{\iota_E} = \tilde{\bar{\phi}} \circ \widehat{\iota_4} \circ \phi_{Q}^{-1}$ で定める（$\widehat{\iota_4}$ は図式-1.1 における $kC_{G\times G'}(\ddot{Q})$-インテリア多元環としての埋め込み)。また、$\mathcal{O}\ddot{P}$-加群 N は置換加群である。

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Ind}^{G\times G'}_{\ddot{P}}(\mathrm{E}_{\mathcal{O}}(N))^{\ddot{Q}} \arrow[r, "\phi", "\sim"'] \arrow[d, "\mathrm{Br}_{\ddot{Q}}"'] & \mathrm{E}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Ind}^{G\times G'}_{\ddot{P}}(N))^{\ddot{Q}} \arrow[d, "(\mathrm{Br}_{\ddot{Q}})_{\mathrm{E}}"] \\
\mathrm{Ind}^{G\times G'}_{\ddot{P}}(\mathrm{E}_{\mathcal{O}}(N))(\ddot{Q}) \arrow[r, "\tilde{\bar{\phi}}", "\cong"'] & \mathrm{E}_{k}(\mathrm{Ind}^{G\times G'}_{\ddot{P}}(N)(\ddot{Q})) \\
\mathrm{Ind}^{C_{G\times G'}(\ddot{Q})}_{C_{\ddot{P}}(\ddot{Q})}(\mathrm{E}_{k}(N(Q_{\delta}))) \arrow[r, "\phi_{Q}", "\sim"'] \arrow[u, "\widehat{\iota_4}"] & \mathrm{E}_{k}\big(\mathrm{Ind}^{C_{G\times G'}(\ddot{Q})}_{C_{\ddot{P}}(\ddot{Q})}(N(Q_{\delta}))\big) \arrow[u, "\widehat{\iota_E}"']
\end{tikzcd}
$$

図式-3.2.1

命題 3.2.1 置換 $\mathcal{O}\ddot{P}$-加群 N に対して、多元環同型 $\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(N)(\ddot{Q}) \cong \mathrm{End}_{k}(N(\ddot{Q}))$ が $kC_{\ddot{P}}(\ddot{Q})$-インテリア多元環として同型であると仮定する。このとき、図式-3.2.1 における $\widehat{\iota_E}$ は $kC_{G\times G'}(\ddot{Q})$-インテリア多元環としての埋め込みである。

[**証明**] $\widehat{\iota_4} \circ \phi_{Q}^{-1}$ はインテリア多元環としての埋め込み、$\tilde{\bar{\phi}}$ は多元環同型より、$\widehat{\iota_E}$ は多元環としての埋め込みである。以下、$\widehat{\iota_E}$ が $kC_{G\times G'}(\ddot{Q})$-インテリア多元環準同型であることを示す。このためには、$\mathrm{End}_{k}\big(\mathrm{Ind}^{C_{G\times G'}(\ddot{Q})}_{C_{\ddot{P}}(\ddot{Q})}(N(Q_{\delta}))\big)$ の単位元 1 と $q \in C_{G\times G'}(\ddot{Q})$ に対して、次が成り立つことを示せばよい（[5] 参照)。

(3.2.5) $\widehat{\iota_E}(q\cdot 1) = q\cdot\widehat{\iota_E}(1)$、$q\cdot\widehat{\iota_E}(1)\cdot q^{-1} = \widehat{\iota_E}(1)$

次の $kC_{\ddot{P}}(\ddot{Q})$-インテリア多元環としての同型が存在する。ここで、最初の同型は仮定より得られ、次の等号は [2、(4.1.2)] より得られる。

(3.2.6)

$$\mathrm{End}_k(N(\ddot{Q}))_{\bar{\ddot{\varepsilon}}} \cong \mathrm{End}_{\mathcal{O}}(N)_{\ddot{\varepsilon}}(\ddot{Q}) = \mathrm{End}_k(N(Q_\delta))$$

この同型より、$N(Q_\delta)$ を $N(\ddot{Q})$ の $kC_{\ddot{P}}(\ddot{Q})$-加群としての直和因子と見なすことができる。そこで、$N(Q_\delta)$ のかわりに $N(\ddot{Q})$ に対して (3.2.5) を示せばよい。

まず、$\mathrm{Ind}_{C_{\ddot{P}}(\ddot{Q})}^{C_{G\times G'}(\ddot{Q})}(\mathrm{End}_k(N(\ddot{Q})))$ の k-基底を定める。$\mathcal{N}$ を N の $\ddot{P}$-不変 $\mathcal{O}$-基底とする。このとき、$\mathrm{Ind}_{C_{\ddot{P}}(\ddot{Q})}^{C_{G\times G'}(\ddot{Q})}\big(\mathrm{End}_k(N(\ddot{Q}))\big)$ の k-基底として次が取れる。

(3.2.7)

$$\Big\{(g,g')\otimes_{C_{\ddot{P}}(\ddot{Q})} E_{\bar{u},\bar{v}}^{N(\ddot{Q})} \otimes_{C_{\ddot{P}}(\ddot{Q})} (h,h')^{-1} \;\Big|\; (g,g'),(h,h') \in [C_{G\times G'}(\ddot{Q})/C_{\ddot{P}}(\ddot{Q})],\ u,v \in \mathcal{N}^{\ddot{Q}}\Big\}$$

さらに、この基底の $\widehat{\iota_4}$ による像は次のようになる。

(3.2.8)

$$\overline{(g,g')\otimes_{\ddot{P}} E_{u,v}^{N} \otimes_{\ddot{P}} (h,h')^{-1}} \in \mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{G\times G'}(\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(N))(\ddot{Q})$$

また、$\mathrm{End}_k\big(\mathrm{Ind}_{C_{\ddot{P}}(\ddot{Q})}^{C_{G\times G'}(\ddot{Q})}(N(\ddot{Q}))\big)$ の k-基底として次を取ることができる。

(3.2.9)

$$\Big\{E^{U}_{(g,g')\otimes_{C_{\ddot{P}}(\ddot{Q})}\bar{u},\ (h,h')\otimes_{C_{\ddot{P}}(\ddot{Q})}\bar{v}} \;\Big|\; (g,g'),(h,h') \in [C_{G\times G'}(\ddot{Q})/C_{\ddot{P}}(\ddot{Q})],\ u,v \in \mathcal{N}^{\ddot{Q}}\Big\}$$

ここで、$U = \mathrm{Ind}_{C_{\ddot{P}}(\ddot{Q})}^{C_{G\times G'}(\ddot{Q})}(N(\ddot{Q}))$ である。このとき、$\widehat{\iota_4}$ に対しては式 (3.2.8)、$\widetilde{\bar{\phi}}$、ϕ_Q に対しては式 (3.2.2)、(3.2.3)、(3.2.4) を適用することにより、次が成り立つ。

(3.2.10)

$$\widehat{\iota_E}(E^{U}_{(g,g')\otimes_{C_{\ddot{P}}(\ddot{Q})}\bar{u},\ (h,h')\otimes_{C_{\ddot{P}}(\ddot{Q})}\bar{v}}) = E^{L}_{\overline{(g,g')\otimes_{\ddot{P}}u},\ \overline{(h,h')\otimes_{\ddot{P}}v}}$$

ここで、$L = \mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{G\times G'}(N)(\ddot{Q})$ である。さらに、$U = \mathrm{Ind}_{C_{\ddot{P}}(\ddot{Q})}^{C_{G\times G'}(\ddot{Q})}(N(\ddot{Q}))$ の k-基底として次が取れる。

(3.2.11)

$$\mathcal{U} = \{(g,g')\otimes_{C_{\ddot{P}}(\ddot{Q})} \bar{u} \mid (g,g') \in [C_{G\times G'}(\ddot{Q})/C_{\ddot{P}}(\ddot{Q})],\ u \in \mathcal{N}^{\ddot{Q}}\}$$

このとき、$\mathrm{End}_k\big(\mathrm{Ind}_{C_{\ddot{P}}(\ddot{Q})}^{C_{G\times G'}(\ddot{Q})}(N(\ddot{Q}))\big)$ の単位元 1 は次のように表される。

(3.2.12)

$$1 = \sum_{\mathcal{U}} E^{U}_{(g,g')\otimes_{C_{\ddot{P}}(\ddot{Q})}\bar{u},\ (g,g')\otimes_{C_{\ddot{P}}(\ddot{Q})}\bar{u}}$$

ここで、和は $\mathcal{U}$ の元すべてにわたって取る。さらに、$q \in C_{G\times G'}(\ddot{Q})$ に対して、次の等式を満たす $q(g,g') \in C_{\ddot{P}}(\ddot{Q})$ をとることができる。

(3.2.13)

$$q\cdot\big((g,g')\otimes_{C_{\ddot{P}}(\ddot{Q})}\bar{u}\big) = (h,h')\otimes_{C_{\ddot{P}}(\ddot{Q})} \overline{q(g,g')u}$$

ここで、$(h,h') \in [C_{G\times G'}(\ddot{Q})/C_{\ddot{P}}(\ddot{Q})]$、さらに、$\mathcal{N}$ が $\ddot{P}$-不変より $q(g,g')u \in \mathcal{N}^{\ddot{Q}}$ である。そこで (3.2.5) に関して、次が成り立つ (3 番目の等号は式 (3.2.10) から得られる)。

(3.2.14)

$$\begin{aligned}\widehat{\iota_E}(q\cdot 1) &= \widehat{\iota_E}\big(q\cdot \sum_{\mathcal{U}} E^{U}_{(g,g')\otimes_{C_{\ddot{P}}(\ddot{Q})}\bar{u},\ (g,g')\otimes_{C_{\ddot{P}}(\ddot{Q})}\bar{u}}\big)\\ &= \widehat{\iota_E}\big(\sum_{\mathcal{U}} E^{U}_{(h,h')\otimes_{C_{\ddot{P}}(\ddot{Q})}\overline{q(g,g')u},\ (g,g')\otimes_{C_{\ddot{P}}(\ddot{Q})}\bar{u}}\big)\\ &= \sum_{\mathcal{U}} E^{L}_{\overline{(h,h')\otimes_{\ddot{P}}q(g,g')u},\ \overline{(g,g')\otimes_{\ddot{P}}u}}\\ &= \sum_{\mathcal{U}} q\cdot E^{L}_{\overline{(g,g')\otimes_{\ddot{P}}u},\ \overline{(g,g')\otimes_{\ddot{P}}u}} = q\cdot\widehat{\iota}_E(1)\end{aligned}$$

次に (3.2.5) の 2 番目の等式について考察する。$\widehat{\mathcal{N}} = \{(g,g')\otimes_{\ddot{P}} u \mid (g,g') \in [G\times G'/\ddot{P}],\ u \in \mathcal{N}\}$ が $\mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{G\times G'}(N)$ の $\ddot{Q}$-不変 な $\mathcal{O}$-基底となることより、$\overline{\widehat{\mathcal{N}}} = \{\overline{(g,g')\otimes_{\ddot{P}} u} \mid (g,g')\otimes_{\ddot{P}} u \in \widehat{\mathcal{N}}^{\ddot{Q}}\}$ は $\mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{G\times G'}(N)(\ddot{Q})$ の k-基底となる。また、$kC_{G\times G'}(\ddot{Q})$-単射準同型 $\mathrm{Ind}_{C_{\ddot{P}}(\ddot{Q})}^{C_{G\times G'}(\ddot{Q})}(N(\ddot{Q})) \to \mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{G\times G'}(N)(\ddot{Q})$ による $\mathcal{U}$ の像は $\bar{\mathcal{U}} = \{\overline{(g,g')\otimes_{\ddot{P}} u} \mid (g,g')\otimes_{C_{\ddot{P}}(\ddot{Q})} \bar{u} \in \mathcal{U}\}$ となる ([2、命題 4.2.1] 参照)。このとき、$\bar{\mathcal{U}}$ は $\overline{\widehat{\mathcal{N}}}$ に含まれ、$C_{G\times G'}(\ddot{Q})$ の作用で閉じている。そこで、$q \in C_{G\times G'}(\ddot{Q})$ に対して、次が成り立つ。

(3.2.15)

$\overline{(g,g')\otimes_{\ddot{P}} u} \in \bar{\mathcal{U}}$ のとき、

$$q\cdot\widehat{\iota_E}(1)\cdot q^{-1}\big(\overline{(g,g')\otimes_{\ddot{P}} u}\big) = \overline{(g,g')\otimes_{\ddot{P}} u}$$

$\overline{(g,g')\otimes_{\ddot{P}} u} \in \overline{\widehat{\mathcal{N}}} - \bar{\mathcal{U}}$ のとき、

$$q\cdot\hat{\iota}_E(1)\cdot q^{-1}(\overline{(g,g')\otimes_{\ddot{P}} u}) = 0$$

よって $q\cdot\widehat{\iota_E}(1)\cdot q^{-1} = \widehat{\iota_E}(1)$ が成り立ち、$\widehat{\iota_E}$ は $kC_{G\times G'}(\ddot{Q})$-インテリア多元環準同型である。 □

次に Puig 同値について考察する。命題 3.2.1 において置換加群 N が自明な加群であるとき、仮定はみたされる。

定理 3.2.2　図式-2.1.1 の記号のもと、次の等式を満たす $\mathrm{Ind}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)}(A_\varepsilon(Q))^{C_G(Q)}$ における可逆元 c が存在すると仮定する。

(3.2.16)
$$\widehat{\iota_0}\big(\lambda_Q(\bar{b}(\delta))\big)\mathrm{Br}_0(\lambda(b))\widehat{\iota_0}\big(\lambda_Q(\bar{b}(\delta))\big)$$
$$=\widehat{\iota_0}(c)\widehat{\iota_0}\big(\lambda_Q(\bar{b}(\delta))\big)=\widehat{\iota_0}\big(\lambda_Q(\bar{b}(\delta))\big)\widehat{\iota_0}(c)$$

このとき、直既約 $\mathcal{O}(G\times G')$-加群 M が $\mathcal{O}Gb$ と $\mathcal{O}G'b'$ の間の Puig 同値を導くとすると $kC_G(Q)\bar{b}(\delta)$ と $kC_{G'}(Q')\bar{b}(\delta')$ の間の Puig 同値を導く直既約 $kC_{G\times G'}(\ddot{Q})$-加群 $M(Q_\delta)$ は M の Brauer 準同型による像 $M(\ddot{Q})$ の $kC_{G\times G'}(\ddot{Q})$-加群としての直和因子である。

証明　図式-1.1 と図式-2.1.1 および図式-3.2.1 の記号のもとで、次を定める。

(3.2.17)
$$e=(\mathrm{Br}_{\ddot{Q}})_E\circ\phi\circ\theta\circ\lambda(b)$$
$$f=\widehat{\iota_E}\circ\phi_Q\circ\theta_Q(1)\quad(1\text{ は }\mathrm{Ind}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)}(A_\varepsilon(Q))\text{ の単位元})$$
$$e'=\widehat{\iota_E}\circ\phi_Q\circ\theta_Q\circ\lambda_Q(\bar{b}(\delta))$$
$$\xi=\widehat{\iota_E}\circ\phi_Q\circ\theta_Q(c)$$

また、M の $\mathcal{O}\ddot{P}$-ソース加群は自明な加群 $\mathcal{O}$ である。そこで $\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O})=\mathcal{O}$、$N(Q_\delta)=k$ となる。

命題 3.2.1 の証明と同様に $L=\mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{G\times G'}(\mathcal{O})(\ddot{Q})$ とおく。e、f、e' は $\mathrm{End}_k(L)$ におけるべき等元である。さらに、[2、補題 4.2.5 と (4.2.28)] に注意すると、$\widehat{\iota_E}\circ\phi_Q\circ\theta_Q$ は $\mathrm{End}_k(L)^{1\times C_{G'}(Q')}$ への埋め込みである。そこで、ξ は $f\mathrm{End}_k(L)^{1\times C_{G'}(Q')}f\subseteq f\mathrm{End}_k(L)f=\mathrm{End}_k(fL)$ における可逆元である。これらの元の間に次の関係が成り立つ。

(3.2.18)
$$fe'=e'f=e'$$
$$e'ee'=\xi e'=e'\xi$$

(3.2.18) における上の関係式は明らかである。一方、下の関係式は図式-1.1 と図式-3.2.1 の可換性より、仮定 (3.2.16) から導かれる。

$fe'=e'f=e'$ より $fL=e'L\oplus(f-e')L$ である。また、ξ の可逆性より ξ の fL への制限は k-自己同型 $fL\cong fL$ を導く。さらに、$\xi e'=e'\xi$ より ξ が k-自己同型 $e'L\cong e'L$ を導くことも分かる。そこで、$e'ee'=\xi e'$ より次の k-準同型の合成は恒等写像である。

$$(3.2.19)\qquad e'L\xrightarrow{\ e\ }eL\xrightarrow{\ e'\ }e'L\xrightarrow{\ \xi^{-1}\ }e'L$$

ところで、定理 1.1 における θ の像は、正確には、$\mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{G\times G'}(\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(N))^{Q\times G'}$ に含まれる（[2、図式-5.5] 参照)。そこで、 $b\in A^G$ に対して次が得られる。

$$(3.2.20)\qquad \theta\circ\lambda(b)\in\mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{G\times G'}(\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}))^{G\times G'}$$

さらに、θ_Q の像が $\mathrm{Ind}_{C_{\ddot{P}}(\ddot{Q})}^{C_{G\times G'}(\ddot{Q})}(\mathrm{End}_k(k))^{1\times C_{G'}(Q')}$ に含まれることより、$c\in\mathrm{Ind}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)}(A_\varepsilon(Q))^{C_G(Q)}$、$\lambda_Q(\bar{b}(\delta))\in\mathrm{Ind}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)}(A_\varepsilon(Q))^{C_G(Q)}$ に対して次が得られる。

(3.2.21)
$$\theta_Q(c)\in\mathrm{Ind}_{C_{\ddot{P}}(\ddot{Q})}^{C_{G\times G'}(\ddot{Q})}\big(\mathrm{End}_k(k)\big)^{C_G(Q)\times C_{G'}(Q')}$$
$$\theta_Q\circ\lambda_Q(\bar{b}(\delta))\in\mathrm{Ind}_{C_{\ddot{P}}(\ddot{Q})}^{C_{G\times G'}(\ddot{Q})}\big(\mathrm{End}_k(k)\big)^{C_G(Q)\times C_{G'}(Q')}$$

このとき、$C_G(Q)\times C_{G'}(Q')=C_{G\times G'}(\ddot{Q})$ に注意すると、式 (3.2.20) と (3.2.21) より、e、e' と ξ が $\mathrm{End}_k(L)^{C_{G\times G'}(\ddot{Q})}$ に属することが分かる。よって、式 (3.2.19) が恒等写像であることは、$e'L$ が eL の $kC_{G\times G'}(\ddot{Q})$-加群としての直和因子であることを意味する。さらに、$kC_{G\times G'}(\ddot{Q})$-加群として次の同型が成り立ち、$M(Q_\delta)$ が $M(\ddot{Q})$ の直和因子となることが分かる。

$$(3.2.22)\qquad eL=M(\ddot{Q})\text{、}e'L\cong M(Q_\delta)$$

実際、[2、系 3.4.1] より M は $\hat{b}=\phi\circ\theta\circ\lambda(b)$ によって定まる $\mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{G\times G'}(N)=\mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{G\times G'}(\mathcal{O})$ の直和因子、すなわち、$M=\hat{b}\mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{G\times G'}(\mathcal{O})$ である。そこで、(3.1.1) の同型 μ に従ってチェックすることにより $eL=M(\ddot{Q})$ となることが分かる。一方、[2、系 4.1.3] より $M(Q_\delta)$ は $\hat{\beta}=\phi_Q\circ\theta_Q\circ\lambda_Q(\bar{b}(\delta))$ によって定まる $\mathrm{Ind}_{C_{\ddot{P}}(\ddot{Q})}^{C_{G\times G'}(\ddot{Q})}(N(Q_\delta))=\mathrm{Ind}_{C_{\ddot{P}}(\ddot{Q})}^{C_{G\times G'}(\ddot{Q})}(k)$ の直和因子、すなわち、$M(Q_\delta)=\hat{\beta}\mathrm{Ind}_{C_{\ddot{P}}(\ddot{Q})}^{C_{G\times G'}(\ddot{Q})}(k)$ である。このとき、Puig 同値の場合、命題 3.2.1 の仮定がみたされることから、命題 3.2.1 より $\widehat{\iota_E}$ は $kC_{G\times G'}(\ddot{Q})$-インテリア多元環としての埋め込みである。よって、次の $kC_{G\times G'}(\ddot{Q})$-インテリア多元環としての同型が得られる。

(3.2.23)
$$\hat{\beta}\cdot \mathrm{End}_k(\mathrm{Ind}_{C_{\ddot{P}}(\ddot{Q})}^{C_{G\times G'}(\ddot{Q})}(k))\cdot\hat{\beta}$$
$$\cong \widehat{\iota_E}(\hat{\beta})\cdot \mathrm{End}_k(L)\cdot\widehat{\iota_E}(\hat{\beta})$$

そこで、[5、補題 10.7] より $kC_{G\times G'}(\ddot{Q})$-加群としての同型 $M(Q_\delta)\cong e'L$ が得られることが分かる。以上より、同型 (3.2.22) を示すことができ、証明は完了する。 □

定理 2.2.2 より、$Q=P$ のときは定理 3.2.2 の等式 (3.2.16) を満たす可逆元が存在する。そこで、定理 3.2.2 から次が得られる。

系 3.2.3 直既約 $\mathcal{O}(G\times G')$-加群 M が $\mathcal{O}Gb$ と $\mathcal{O}G'b'$ の間の Puig 同値を導くとき、$kC_G(P)\bar{b}(\gamma)$ と $kC_{G'}(P')\bar{b}(\gamma')$ の間の Puig 同値を導く直既約 $kC_{G\times G'}(\ddot{P})$-加群 $M(P_\gamma)$ は M の Brauer 準同型による像 $M(\ddot{P})$ の $kC_{G\times G'}(\ddot{P})$-加群としての直和因子である。

4. ベーシック森田同値とマルティプリシティー加群

4.1 この章のための準備

この章では 2 章の設定にもどって M を $A=\mathcal{O}Gb$ と $A'=\mathcal{O}G'b'$ の間のベーシック森田同値を導く直既約 $\mathcal{O}(G\times G')$-加群とし、ブロック b の不足群 P の任意の部分群 $Q\neq 1$ に対して、$M(Q_\delta)$ を $kC_G(Q)\bar{b}(\delta)$ と $kC_{G'}(Q')\bar{b}(\delta')$ の間のベーシック森田同値を導く直既約 $kC_{G\times G'}(\ddot{Q})$-加群とする。この章では M と $M(Q_\delta)$ に、それぞれ、関連して定まるマルティプリシティー加群の間の関係を調べる (命題 4.2.1、参照)。

θ、θ_1、θ_Q を定理 1.1 における多元環準同型とし、ϕ、ϕ_Q を (3.1.2) における $kC_{G\times G'}(\ddot{Q})$-インテリア多元環としての同型とする。さらに、$\bar{\phi}$ を ϕ から導かれる次の同型とする。

(4.1.1)
$$\bar{\phi}:\mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{G\times G'}(\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(N))(\ddot{Q})\cong \mathrm{End}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{G\times G'}(N))(\ddot{Q})$$

記号の簡略化のため、次のようにおく。

(4.1.2)
$$\mathcal{B}=\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{G\times G'}(N))、$$
$$\mathcal{C}=\mathrm{End}_k\big(\mathrm{Ind}_{C_{\ddot{P}}(\ddot{Q})}^{C_{G\times G'}(\ddot{Q})}(N(Q_\delta))\big)$$
$$\widetilde{\theta}=\phi\circ\theta、\widetilde{\theta_1}=\bar{\phi}\circ\theta_1、\widetilde{\theta_Q}=\phi_Q\circ\theta_Q、$$
$$\mathrm{Br}'_0:\mathcal{B}^{\ddot{Q}}\to\mathcal{B}(\ddot{Q})\quad(\text{Brauer 準同型})$$
$$\widehat{\iota_4}'=\bar{\phi}\circ\widehat{\iota_1}\circ(\phi_Q)^{-1}$$

定理 3.2.3 の証明の中で注意したように、θ の像は $\mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{G\times G'}(\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(N))^{Q\times G'}$ に含まれ、θ_Q の像は $\mathrm{Ind}_{C_{\ddot{P}}(\ddot{Q})}^{C_{G\times G'}(\ddot{Q})}\big(\mathrm{End}_k(N(Q_\delta))\big)^{1\times C_{G'}(Q')}$ に含まれる。そこで、定理 1.1 より次の可換図式が得られる。ここで、Br_0、Br'_0、$\widetilde{\theta_1}$ 以外の準同型は $\mathcal{O}C_G(Q)$ または $kC_G(Q)$ 上のインテリア多元環としての埋め込みである ([2、定理 4.2.7 の証明] 参照)。また、(4.1.2) で定めた $\widehat{\iota_4}'$ の $\mathcal{C}^{1\times C_{G'}(Q')}$ への制限写像も同じ $\widehat{\iota_4}'$ で表す。

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ind}_P^G(A_\gamma)^Q \arrow[r, "\widetilde{\theta}"] \arrow[d, "\mathrm{Br}_0"] & (\mathcal{B}^{\ddot{Q}})^{1\times G'} \arrow[d, "\mathrm{Br}'_0"] \\
\mathrm{Ind}_P^G(A_\gamma)(Q) \arrow[r, "\widetilde{\theta_1}"] & \mathcal{B}(\ddot{Q})^{1\times C_{G'}(Q')} \\
\mathrm{Ind}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)}(A_\varepsilon(Q)) \arrow[r, "\widetilde{\theta_Q}"] \arrow[u, "\widehat{\iota_0}"] & \mathcal{C}^{1\times C_{G'}(Q')} \arrow[u, "\widehat{\iota_4}'"']
\end{tikzcd}$$

図式-4.1.1

図式-2.1.1 と図式-4.1.1 を合成した図式を考える。これまでと同様に Q_δ を A_γ 上の局所ポイント付き部分群とするとき、$\widetilde{\theta}\circ\lambda$ が埋め込みより、$\widetilde{\theta}\circ\lambda(\delta)$ を含む $(\mathcal{B}^{\ddot{Q}})^{1\times G'}$ のポイント $\mathrm{Im}(\delta)$ が存在し、$\mathrm{Im}(\delta)$ は $\mathcal{B}^{1\times G'}$ 上 $\ddot{Q}$ の局所ポイントである。さらに、$\mathcal{B}$ 上 $\ddot{Q}$ の局所ポイント $\ddot{\delta}$ で次の条件をみたすものが存在する。すなわち、任意の $i\in\mathrm{Im}(\delta)$ に対して、i の $\mathcal{B}^{\ddot{Q}}$ における原始べき等元分解に表れるような $j\in\ddot{\delta}$ で $\mathrm{Br}'_0(j)\neq 0$ となるものが存在する。このとき、[2、系 3.4.1] における $\hat{b}=\widetilde{\theta}\circ\lambda(b)$ に対して、$\ddot{\delta}$ は $\hat{b}\mathcal{B}\hat{b}=\hat{b}\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{G\times G'}(N))\bar{b}$ 上 $\ddot{Q}$ の局所ポイントとみなすことができる。ここで、$\hat{b}\in\mathcal{B}^{G\times G'}=\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{G\times G'}(N))^{G\times G'}$ より、次は $\mathcal{O}(G\times G')$-インテリア多元環としての同型である。

(4.1.3)
$$\hat{b}\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{G\times G'}(N))\hat{b}\cong\mathrm{End}(\hat{b}\mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{G\times G'}(N))$$

さらに、[2、系 3.4.1] より $\hat{b}\mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{G\times G'}(N)\cong M$ である。以上のことから、$\ddot{\delta}$ は $\mathcal{O}(G\times G')$-インテリア多元環 $\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(M)$ 上 $\ddot{Q}$ の局所ポイントとみなすことができる。

$\mathcal{O}(G\times G')$-インテリア多元環 $\mathcal{B}$ における $\ddot{Q}_{\ddot{\delta}}$ のマルティプリシティー加群 $V_{\mathcal{B}}(\ddot{Q}_{\ddot{\delta}})$ を簡単のため $V_{\ddot{Q}_{\ddot{\delta}}}$ で表す。$V_{\ddot{Q}_{\ddot{\delta}}}$ は $kC_{G\times G'}(\ddot{Q})$-加群である。また、$\mathcal{B}$ について $\ddot{Q}_{\ddot{\delta}}$ のマルティプリシティー多元環を $\mathcal{B}(\ddot{Q}_{\ddot{\delta}})$ で表す。このとき、次の可換図式が得られる。

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}^{\ddot{Q}} \arrow[d, "\mathrm{Br}'_0"'] \arrow[dr, "\ddot{s}"] & \\
\mathcal{B}(\ddot{Q}) \arrow[r, "\bar{\ddot{s}}"'] & \mathcal{B}(\ddot{Q}_{\ddot{\delta}})
\end{tikzcd}$$

図式-4.1.2

ここで、Br'_0 は (4.1.1) における Brauer 準同型、$\ddot{s}$ はマルティプリシティー多元環への商写像である。また、$\mathcal{B}(\ddot{Q}_{\ddot{\delta}})$ がポイント $\mathrm{Br}'_0(\ddot{\delta})$ によって定まる $\mathcal{B}(\ddot{Q})$ のマルティプリシティー多元環でもあることより、$\bar{\ddot{s}}$ はその商写像を表す。

4.2 この章の主結果

直既約 $\mathcal{O}(G\times G')$-加群 M が $\mathcal{O}Gb$ と $\mathcal{O}G'b'$ の間のベーシック森田同値を導くとし、$\ddot{\delta}$ を 4.1 節で定めた $\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(M)$ 上 $\ddot{Q}$ の局所ポイントとする。このとき、図式-2.1.1 と図式-4.1.1 における記号のもと、次が得られる。

定理 4.2.1　次の等式を満たす $\mathrm{Ind}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)}(A_\varepsilon(Q))^{C_G(Q)}$ における可逆元 c が存在すると仮定する。

(4.2.1)

$$\widehat{\iota_0}\big(\lambda_Q(\bar{b}(\delta))\big)\mathrm{Br}_0(\lambda(b))\widehat{\iota_0}\big(\lambda_Q(\bar{b}(\delta))\big)$$
$$=\widehat{\iota_0}(c)\widehat{\iota_0}\big(\lambda_Q(\bar{b}(\delta))\big)=\widehat{\iota_0}\big(\lambda_Q(\bar{b}(\delta))\big)\widehat{\iota_0}(c)$$

このとき、$kC_G(Q)\bar{b}(\delta)$ と $kC_{G'}(Q')\bar{b}(\delta')$ の間のベーシック森田同値を導く加群 $M(Q_\delta)$ は $\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(M)$ における $\ddot{Q}_{\ddot{\delta}}$ のマルティプリシティー加群 $V_{\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(M)}(\ddot{Q}_{\ddot{\delta}})$ の $kC_{G\times G'}(\ddot{Q})$-加群としての直既約直和因子となる。

証明　以下、定理 3.2.2 と同様な議論をおこなう。記号の乱用となるが、次に定める $\mathcal{B}(\ddot{Q}_{\ddot{\delta}})$ の元を表すために、定理 3.2.2 の証明で用いた記号をここでも用いる。

(4.2.2)

$e=\bar{\ddot{s}}\circ\mathrm{Br}'_0\circ\widetilde{\theta}\circ\lambda(b)$

$f=\bar{\ddot{s}}\circ\widehat{\iota_4}'\circ\widetilde{\theta_Q}(1)$　(1 は $\mathrm{Ind}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)}(A_\varepsilon(Q))$ の単位元)

$e'=\bar{\ddot{s}}\circ\widehat{\iota_4}'\circ\widetilde{\theta_Q}\circ\lambda_Q(\bar{b}(\delta))$

$\xi=\bar{\ddot{s}}\circ\widehat{\iota_4}'\circ\widetilde{\theta_Q}(c)$

ここで、$e\neq 0$、さらに、図式-2.4.3 と図式-4.1.1 の可換性より f、e'、ξ は $\mathcal{B}(\ddot{Q}_{\ddot{\delta}})$ において 0 とならないことが分かる。

$\widehat{\iota_4}'\circ\widetilde{\theta_Q}:\mathrm{Ind}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)}(A_\varepsilon(Q))\to\mathcal{B}(\ddot{Q})^{1\times C_{G'}(Q')}$ が埋め込みより、ξ は $f\mathcal{B}(\ddot{Q}_{\ddot{\delta}})^{1\times C_{G'}(Q')}f\subseteq f\mathcal{B}(\ddot{Q}_{\ddot{\delta}})f$ における可逆元である。さらに、仮定 (4.2.1) より $e'ee'=\xi e'=e'\xi$ が成り立つ。定理 3.2.2 の証明における L を $V_{\ddot{Q}_{\ddot{\delta}}}$ で置き換えて同じ議論をおこなうことによって、$e'V_{\ddot{Q}_{\ddot{\delta}}}$ が $eV_{\ddot{Q}_{\ddot{\delta}}}$ の $kC_{G\times G'}(\ddot{Q})$-加群としての直和因子となることを示すことができる。さらに、$kC_{G\times G'}(\ddot{Q})$-加群として次の同型が成り立ち、$M(Q_\delta)$ が $V_{\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(M)}(\ddot{Q}_{\ddot{\delta}})$ の直和因子となることが分かる。

(4.2.3)　$eV_{\ddot{Q}_{\ddot{\delta}}}=V_{\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(M)}(\ddot{Q}_{\ddot{\delta}})$、$e'V_{\ddot{Q}_{\ddot{\delta}}}\cong M(Q_\delta)$

以下、(4.2.3) を示す。4.1 節で示したように $\ddot{\delta}$ は $\hat{b}\mathcal{B}\hat{b}=\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(M)$ 上 $\ddot{Q}$ の局所ポイントとみなすことができる。そこで、図式-4.1.2 における $\ddot{s}$ を制限することによって、次の上への多元環準同型が得られる。

(4.2.4)　$\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(M)^{\ddot{Q}}\to\mathrm{End}_k(\ddot{s}(\hat{b})V_{\ddot{Q}_{\ddot{\delta}}})\neq 0$

これは $\mathrm{End}_k(\ddot{s}(\hat{b})V_{\ddot{Q}_{\ddot{\delta}}})$ が $\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(M)$ についての $\ddot{Q}_{\ddot{\delta}}$ のマルティプリシティー多元環であることを意味する。よって、$V_{\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(M)}(\ddot{Q}_{\ddot{\delta}})=\ddot{s}(\hat{b})V_{\ddot{Q}_{\ddot{\delta}}}$ である。さらに、図式-4.1.2 より $\ddot{s}(\hat{b})=\bar{\ddot{s}}\circ\mathrm{Br}'_0(\hat{b})=e$ であるから、$V_{\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(M)}(\ddot{Q}_{\ddot{\delta}})=eV_{\ddot{Q}_{\ddot{\delta}}}$ が成り立つ。

一方、$M(Q_\delta)$ について、$\hat{\beta}=\widetilde{\theta_Q}\circ\lambda_Q(\bar{b}(\delta))$ とおくと、[2、系 4.1.3] より $\mathrm{End}_k(M(Q_\delta))=\hat{\beta}\mathcal{C}\hat{\beta}$ である。さらに、$\widehat{\iota_4}':\mathcal{C}\to\mathcal{B}(\ddot{Q})$ が $kC_{G\times G'}(\ddot{Q})$-インテリア多元環としての埋め込みより次の $kC_{G\times G'}(\ddot{Q})$-インテリア多元環としての同型が得られる。

(4.2.5)　$\mathrm{End}_k(M(Q_\delta))\cong\widehat{\iota_4}'(\hat{\beta})\cdot\mathcal{B}(\ddot{Q})\cdot\widehat{\iota_4}'(\hat{\beta})$

さらに、$\bar{\bar{s}}\big(\widehat{\iota_4}'(\hat{\beta})\cdot\mathcal{B}(\ddot{Q})\cdot\widehat{\iota_4}'(\hat{\beta})\big)\neq 0$ であり、次が成り立つ。

(4.2.6) $\quad e'\bar{\bar{s}}(\mathcal{B}(\ddot{Q}))e' = e'\mathcal{B}(\ddot{Q}_{\ddot{\delta}})e' = \mathrm{End}_k(e'V_{\ddot{Q}_{\ddot{\delta}}})$

ここで、$\widetilde{\theta_Q}\circ\lambda_Q$ の像が $\mathcal{C}^{1\times C_{G'}(Q')}$ に含まれることより $\bar{b}(\delta)$ の像である e' について、$e'\in\mathcal{B}(\ddot{Q}_{\ddot{\delta}})^{C_{G\times G'}(\ddot{Q})}$ が成り立つ。よって、$\mathrm{End}_k(e'V_{\ddot{Q}_{\ddot{\delta}}})$ は $kC_{G\times G'}(\ddot{Q})$-インテリア多元環である。さらに、$\mathrm{End}_k(M(Q_\delta))$ が単純環であることに注意すれば、(4.2.5)、(4.2.6) より次の $kC_{G\times G'}(\ddot{Q})$-インテリア多元環としての同型が導かれる。

(4.2.7) $\quad \mathrm{End}_k(M(Q_\delta))\cong\mathrm{End}_k(e'V_{\ddot{Q}_{\ddot{\delta}}})$

[5、補題 10.7] より、同型 (4.2.7) は $kC_{G\times G'}(\ddot{Q})$-加群としての同型 $M(Q_\delta)\cong e'V_{\ddot{Q}_{\ddot{\delta}}}$ を与える。以上より (4.2.3) が成り立ち、証明は完了する。 □

定理 2.2.2 から $Q=P$ のとき定理 4.2.1 の等式 (4.2.1) をみたす可逆元が取れることより、次が成り立つ。

系 4.2.2 直既約 $\mathcal{O}(G\times G')$-加群 M が $\mathcal{O}Gb$ と $\mathcal{O}G'b'$ の間の ベーシック森田同値を導くとすると、$kC_G(P)\bar{b}(\gamma)$ と $kC_{G'}(P')\bar{b}(\gamma')$ の間の ベーシック森田同値を導く直既約 $kC_{G\times G'}(\ddot{P})$-加群 $M(P_\gamma)$ は $\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(M)$ のマルティプリシティー加群$V_{\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(M)}(\ddot{P}_{\ddot{\gamma}})$ の $kC_{G\times G'}(\ddot{P})$-加群としての直和因子である。

注意 4.2.3 [4、命題 6.5] より、直既約 $\mathcal{O}(G\times G')$-加群 M が $\mathcal{O}Gb$ と $\mathcal{O}G'b'$ の間の森田同値を導くための必要十分条件は、M の $\mathcal{O}Gb$-加群としての作用を与える写像 $A=\mathcal{O}Gb\to\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(M)^{1\times G'}=\mathrm{End}_{\mathcal{O}(1\times G')}(M)$ が $\mathcal{O}G$-インテリア多元環として同型となることである。そこで、3.1 節の設定のもと M がベーシック森田同値を導くとき、次の 2 つのインテリア多元環同型が得られる。

(4.2.8)

$\psi_1 : A\cong\mathrm{End}_{\mathcal{O}(1\times G')}(M)$、

$\psi_2 : kC_G(Q)\bar{b}(\delta)\cong\mathrm{End}_{k(1\times C_{G'}(Q'))}(M(Q_\delta))$

ここで、Q_δ は $Q_\delta\subset P_\gamma$ となる A 上の局所ポイント付き部分群である。さらに、$\bar{\delta}$ を Brauer 準同型 $A\to A(Q)$ による δ の像とすると、$\bar{\delta}$ は $kC_G(Q)\bar{b}(\delta)$ におけるポイントである。ψ_1 による δ の像を δ'、ψ_2 による $\bar{\delta}$ の像を $\bar{\delta}'$ とするとき、$\mathrm{End}_{k(1\times C_{G'}(Q'))}(M(Q_\delta))$ における $\bar{\delta}'$ のマルティプリシティー加群 $V_{\mathrm{End}_{k(1\times C_{G'}(Q'))}(M(Q_\delta))}(\bar{\delta}')$ は、$\mathrm{End}_{\mathcal{O}(1\times G')}(M)$ における $Q_{\delta'}$ のマルティプリシティー加群 $V_{\mathrm{End}_{\mathcal{O}(1\times G')}(M)}(Q_{\delta'})$ の $kC_G(Q)$-加群としての直和因子である。

5. おわりに

(a) 図式-2.1.1 が可換である。(b) 任意の $\mathcal{O}\ddot{P}$-加群 N に対して可換図式-3.2.1 が得られる。もし条件 (a)、(b) が成り立てば、1 章の埋め込み (1.1)、(1.2) から成る可換図式が得られる。その結果として、$M(Q_\delta)$ は M の Brauer 準同型による像 $M(\ddot{Q})$ の $kC_{G\times G'}(\ddot{Q})$-加群としての直和因子となる。しかし、一般には (a)、(b) が成り立つとは限らない。そのため、この論文ではやや強いいくつか設定のもとで、条件 (a) の図式の可換性より弱いべき等元に関する条件 (3.2.16) が成り立つこと、および、条件 (b) が成り立つことを示した。ただし、これらの設定は本質的なものとは言えない。今後の課題は、べき等元に関する条件と条件 (b) が成り立つような本質的な設定を見つけることである。

参考文献

1) Broué, M. and Puig, L. (1980)「Characters and local structure in G-algebras」『Journal of Algebra』63, 306-317.
2) 河合浩明（2012)「ベーシック森田同値の局所構造に関する注意 I」『崇城大学紀要』第 38 巻, 1-19.
3) 永尾汎、津島行男（1987)『有限群の表現』裳華房.
4) Puig, L. (1999)『On the Local Structure of Morita and Rickard Equivalences between Brauer Blocks』Birkhäuser.
5) Thévenaz, J. (1995)『G-algebras and Modular Representation Theory』Oxford University Press.