

博 士 論 文

弾性・弾塑性挙動を考慮した密度変動型トポロジー
最適化およびそれらの境界特定手法に関する研究

令和 3 年度

崇城大学 大学院工学研究科

機械システム工学専攻 博士後期課程

材料工学講座

1913D02

西 尾 佳 倫

目次

第 1 章	序論.....	1
1.1	構造の形状・形態設計.....	1
1.2	構造最適化手法.....	1
1.3	弾塑性挙動を考慮した構造最適化.....	3
1.4	トポロジー最適化における CAD モデルの抽出.....	5
1.5	研究の目的.....	7
1.6	論文の構成.....	7
	参考文献.....	9
第 2 章	弾性構造体のトポロジー最適化手法.....	12
2.1	トポロジー最適化.....	12
2.2	トポロジー最適化の手法.....	14
2.3	均質化法.....	15
2.4	レベルセット法.....	15
2.5	密度法.....	15
2.6	密度法に基づくトポロジー最適化の流れ.....	16
2.7	最適化の方法.....	18
2.7.1	ラグランジュ未定乗数法.....	19
2.7.2	感度解析.....	20
2.7.3	フィルタリング法.....	21
2.7.4	最適化基準法.....	22
2.8	トポロジー最適化プログラム.....	24
2.8.1	トポロジーパラメータの設定.....	24
2.8.2	最適化計算の定式化.....	24
2.8.3	感度解析.....	25
2.8.4	設計変数の更新.....	26
2.9	プログラムの全体の流れ.....	27
	参考文献.....	27
第 3 章	繰り返し弾塑性を考慮したせん断型パネルダンパーのトポロジー最適化.....	30
3.1	はじめに.....	30
3.2	先行研究.....	30
3.3	有限要素法による弾塑性解析.....	30
3.4	応力の不変量.....	31
3.5	降伏条件.....	33
3.5.1	トレスカの降伏条件.....	34
3.5.2	ミーゼスの降伏条件.....	36

3.6	弾塑性構成則.....	38
3.6.1	降伏関数.....	38
3.6.2	加工硬化(Work hardening)	38
3.6.3	バウシンガー効果 (Bauschinger effect)	39
3.7	硬化則.....	39
3.7.1	等方硬化則(Isotropic hardening rule)	39
3.7.2	移動硬化則(Kinematic hardening rule)	39
3.7.3	複合硬化則(Combined hardening rule)	40
3.8	最大累積相当塑性ひずみ最小化問題への適応.....	41
3.8.1	定式化.....	41
3.8.2	最大累積相当塑性ひずみ最小化問題.....	42
3.8.3	密度法によるトポロジー最適化.....	43
3.8.4	トポロジー感度の導出.....	43
3.8.5	数値モデル.....	44
3.8.6	材料特性.....	46
3.8.7	境界条件.....	46
3.8.8	初期形状の解析結果.....	46
3.8.9	数値解析結果.....	49
3.8.10	形状の評価.....	53
	参考文献.....	53
第4章	パラメトリック手法によるせん断型パネルダンパーの形状最適化.....	55
4.1	はじめに.....	55
4.2	パラメトリック法.....	55
4.3	応答曲面法.....	56
4.4	実験計画法.....	57
4.4.1	基礎概念.....	57
4.4.2	因子.....	57
4.4.3	水準.....	57
4.4.4	無作為化.....	58
4.4.5	要因配置実験.....	58
4.4.6	直交表.....	58
4.4.7	ラテン方格.....	59
4.4.8	分散分析.....	60
4.5	応答曲面法の流れ.....	60
4.6	応答曲面法の利点.....	61
4.7	代表的なパラメトリック曲線.....	62

4.7.1	ベジエ曲線.....	63
4.7.2	B スプライン曲線.....	64
4.7.3	ベジエ曲線との関係性.....	65
4.8	形状最適化の流れ.....	66
4.9	計算例 1.....	66
4.9.1	定式化.....	66
4.9.2	応答曲面法による推定式の作成.....	67
4.9.3	最適化計算.....	70
4.10	計算例 2.....	71
4.11	計算例 3.....	72
4.12	まとめ.....	74
	参考文献.....	75
第 5 章	ノンパラメトリック境界特定手法.....	77
5.1	はじめに.....	77
5.2	概要.....	77
5.3	ステップ 1：設計領域と設計条件の設定.....	78
5.4	ステップ 2：トポロジー最適化.....	79
5.4.1	トポロジー最適化問題の定式化.....	79
5.4.2	トポロジー感度の導出.....	80
5.5	ステップ 3：境界の平滑処理.....	81
5.5.1	境界平滑処理.....	81
5.5.2	パラメータによる影響.....	84
5.6	ステップ 4：形状最適化.....	85
5.6.1	形状最適化.....	85
5.6.2	形状感度の導出.....	86
5.7	数値例.....	87
5.7.1	計算例 1.....	87
5.7.2	計算例 2.....	91
5.7.3	計算例 3.....	94
5.8	本手法の利点.....	96
	参考文献.....	96
第 6 章	結論.....	97
	謝辞.....	99

第1章 序論

1.1 構造の形状・形態設計

構造物の力学的性能と形状・形態との間には対応関係が存在する。例えば、荷重を受けた構造物の剛性は、明らかに形状・形態に依存する。極端な例として、図 1.1(a)に示す模式図のようなトラス橋を考え、ほとんどの部分が三角形に組み合わせた骨組み構造を主として構成されている。これが図 1.1(b)のようにすべて四角形に組み合わせて作った橋であった場合、動荷重を受ける橋はすぐに崩れてしまうことは想像に難くない。このような力学的性能に限らず、ファンの送風性能、アンテナの電波放射・受信性能などもそれらの形状・形態に依存する。構造物の性能が形状・形態に依存しているならば、その性能が最大となる形状・形態が存在するはずである。従来、通常の設計問題に対する構造物の最適な形状・形態は設計者の勘や経験によって模索されてきたが、近年の構造設計問題の高度化・複雑化に伴ってその検討が困難となってきている。このような状況において、数学的根拠に基づいた構造最適な形状・形態を求める方法論である構造最適化への注目が高まっている。

1.2 構造最適化手法

構造最適化手法とは、あらかじめ決められた設計領域と境界条件の下で所望の性能を最大限に引き出せる構造・形状を求める方法論である。構造最適化手法は寸法最適化、形状最適化、トポロジー最適化の3つに大別される。寸法最適化は、最も簡単な構造最適化手法で梁の高さや幅など機械的あるいは構造的の寸法を設計変数として数学的な最適化手法を用

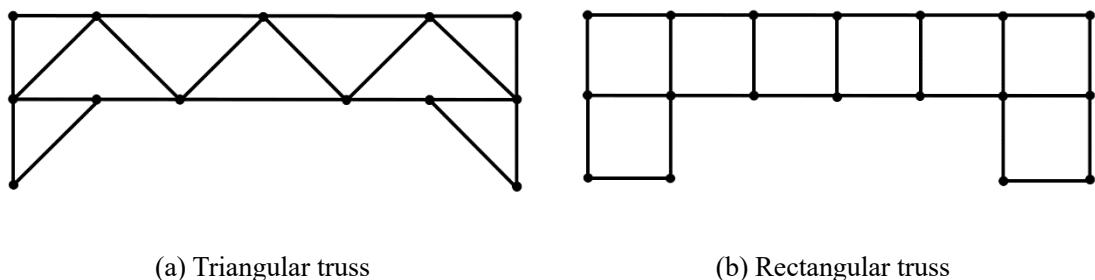
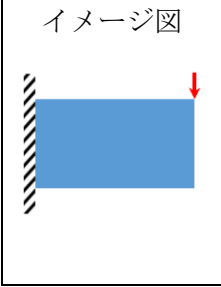
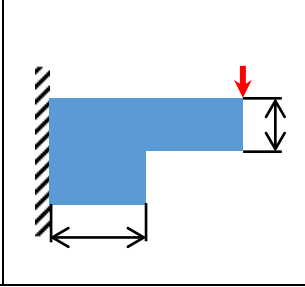
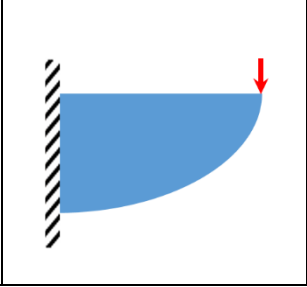


Fig1.1 Examples of truss configurations

いて構造最適化を行う。形状最適化は、構造物の外形形状そのものを設計変数として最適化を行う。設計変数が外形形状そのものであるため、寸法最適化と比較して設計変数により高い自由度をもつ。これによって高い性能が得られると期待できる。しかし、外形形状のみを設計変数とするために孔の数などの構造の形態を変更できない。これに対し、トポロジー最適化は上述の 3 つの手法の中で最も自由度の高い構造最適化の方法である。形状最適化と違いトポロジー最適化は形態の変更が可能で、他の 2 つの手法と比較して高い自由度を持つことから性能の大幅な改善が期待できる。表 1.1 に構造最適化の 3 つの手法の特徴をまとめる。今日では構造最適化手法を構造設計に取り入れることにより、設計プロセスの短縮と構造物の性能向上が図られている。構造設計には、大きく分けて大域的な構造を大まかに決定する概念設計プロセスと、概念設計で決定された構造に対して所望の性能を満足するように局所的な形状修正を行う詳細設計プロセスがある。概念設計プロセスでは、構造設計問題を与えられた設計領域内での材料分布問題に置き換えることで、形状だけでなく形態の変化を許容するトポロジー最適化が用いられることが一般的であり、詳細設計プロセスで

Table1.1 Comparison of three structural optimization methods

	寸法最適化	形状最適化	トポロジー最適化
設計変数	寸法(高さ、幅など)	外形形状(節点座標)	位相(形態)
特徴	<ul style="list-style-type: none"> ・最も簡易的な方法 ・性能向上はあまり期待できない ・複雑な形状変更は起こらない ・パラメータ依存性が極めて高い 	<ul style="list-style-type: none"> ・多くの制約条件を考慮可能 ・孔の数を増減させるなどの位相の変化は困難 ・実設計への展開が容易 	<ul style="list-style-type: none"> ・最も性能向上が期待できる ・最も自由度が高い ・実設計への展開が困難 ・形状の粗さが要素数に依存
イメージ図			

詳細設計プロセスでは、外形形状そのものを設計変数として与えられた境界条件に対して、最適な形状に変形させる形状最適化が用いられるようになってきた。しかし、現在研究されている構造最適化の手法は弾性体を対象としたものがほとんどであり、弾塑性、特に繰り返し弾塑性を考慮した手法は極めて少ない。

ところで、これらの方法論の発展の基にはコンピュータの性能向上に付随した数値実験、構造解析の発展がある。従来、大型コンピュータと高価なプログラムがないと解けなかった問題が、身近にあるパソコンで手軽に解けるようになり、一般的な研究への参入が容易になったことが近年の急速な発展の原因と考えられる。また、構造最適化とともに、その根幹を支える有限要素法の技術が普及し始め、これからの社会の自動化・最適化に大いに貢献するものと期待できる。

1.3 弾塑性挙動を考慮した構造最適化

構造解析は、現在の産業界における設計や性能評価において非常になじみ深いものとなっている。そのような場で取り扱われていた構造解析は近年まで線形解析を取り扱っており、非線形構造解析は研究分野のものとして、実務領域には浸透していなかった。しかし、近年ではより高度な現象を取り扱うために非線形構造解析の必要性に迫られる場面も少なくない。そのような社会の需要に対し、商用の非線形構造解析ソフトウェアが市販されるようになり、気軽に非線形構造解析が実施できる環境が整っている。ところで、構造最適化に関する研究において、扱う構造問題が複雑になると計算コストが膨大になり、また理論も難解となることから、その多くの研究は線形弾性体の単一材料からなる単純な構造に限定した問題を対象としている。単一材料の非線形性を考慮した最適化の研究については、感度解析を主題とする様々な研究成果⁽¹⁾⁽²⁾が報告されている。塑性材料を扱う上での課題は、降伏点あるいは荷重除荷点において応力-ひずみ関係が微分不可能な状態になり、そこでの応力感度を正しく評価することが困難になる点である。Ohsaki ら⁽³⁾は、この問題を詳細に検討しているがトラス構造を対象としたため、連続体からなる構造物についても同等の検討が必要である。これについて、加藤ら⁽⁴⁾は等方性の線形硬化則に基づく von Mises の塑性材料モ

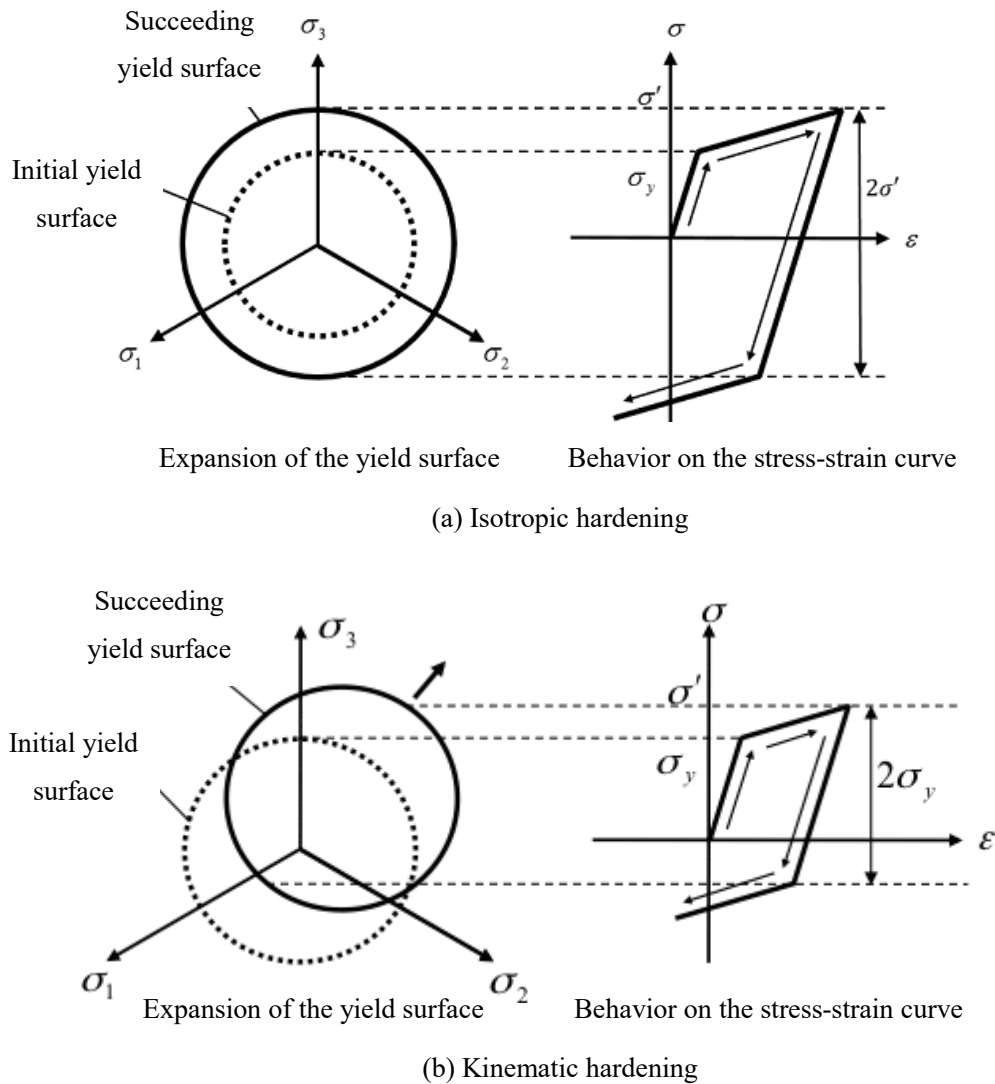


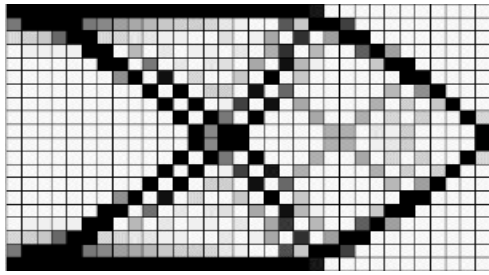
Fig.1.2 Isotropic and kinematic hardening models used for simulating the response under cyclic loading

デルを用いて、解析的感度の導出および精度検証を行った結果を報告している．さらに、その発展として干場ら⁽⁵⁾は、荷重載荷-除荷状態を繰り返す塑性変形状態を想定した状況下で同様に解析感度の導出および精度検証の結果を報告している．しかし、バイリニアモデルのような単純な構成則では、本研究で扱う繰り返し荷重を受けるせん断型パネルダンパーのような弾塑性挙動を予測することは困難である．そこで、本研究では材料の周期的挙動を表現する構成則として複合硬化則を用いる．この複合硬化則は図 1.2(a)に示す等方硬化則と図 1.2(b)に示す移動硬化則を組み合わせたものである．ところで、バウシinger効果および加

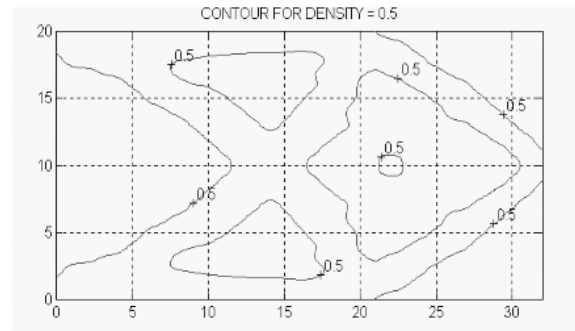
工硬化を考慮した複合硬化則による弾塑性材料モデルを対象とした高精度の感度導出は極めて困難であり、筆者の知る限り報告されていない。複合硬化則を用いることにより降伏点や降伏棚における勾配の不連続性⁽⁶⁾⁽⁷⁾はないが、加工硬化を表わす等方硬化則とバウシニング効果を表わす移動硬化則は線形硬化則に比べて複雑になるため、感度の導出がより困難となる。また、本研究で扱う繰り返し荷重問題において、負荷経路依存性がありながら荷重除荷点における応力とひずみの関係が微分不可能な状態であるため、感度を理論的に導出することが一層難しくなる。そこで、本研究では差分法により感度を導出している。

1.4 トポロジー最適化における CAD モデルの抽出

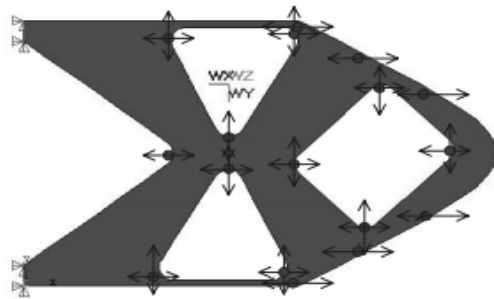
構造最適化結果の利用法の 1 つとして 3D プリンターでの製造が考えられる。寸法最適化や形状最適化のように機械的特性がはっきりしている構造を創出できる構造最適化手法によって得られた構造はそのまま実設計に流用して 3D プリンターによる製造が可能である。しかし、それらの構造最適化手法では孔の増減など形態の変化は発生せず、従来の設計案を著しく逸脱した画期的な設計案を得ることは非常に難しい。一方、トポロジー最適化の結果はその方法論の特性上、従来考えられる構造と比較して複雑な構造を示す場合があり、また機械的特性の不明瞭さを含むことが多い。このため実際の設計・製造に直接適用することが困難であり、トポロジー最適化結果の形状を参考に、設計者による再設計を行っているのが現状である。トポロジー最適化の結果を実設計に活かすには、明確で滑らかな境界を持つ CAD モデルを抽出する必要がある。CAD モデルの抽出手法はこれまでにいくつも提案されてきた。その中で最も多く用いられている手法は、デンシティーコンターアプローチ⁽⁸⁾⁽¹⁰⁾である。この手法では、図 1.3(a)のようにトポロジー最適化を行って得られた結果から図 1.3(b)のように密度分布のコンター図を、しきい値を決めて取り出す。そのコンター図を利用してジオメトリ境界を抽出する手法である。その問題として、境界のしきい値を決めるために数回のテストが必要であり、そこに設計者の勘や経験が不可欠となる。また、この手法を用いて複雑な構造の CAD モデルを取得した場合、非常に細い部分や荒い表面、他の部位と離れて孤立した部分などが生成される可能性がある⁽¹¹⁾。一方図 1.3(c)に示すように、球、円柱、



(a) Topology optimization result



(b) Density contour approach⁽⁹⁾



(c) Fitting with basic shape template⁽¹³⁾

Fig.1.3 CAD model extraction methods for the topology optimization

長方形などの基本的な形状テンプレート⁽¹²⁾⁽¹³⁾を適用して、トポロジー最適化結果における孔のサイズと位置を決定することによる構造モデルを取得する研究も報告されている。しかし、この手法では限られた種類のテンプレートしか使用できず、フィッティング精度をどのようにして高めるかが主要な課題となっている⁽¹⁴⁾⁽¹⁵⁾。他の幾何学的再構成アプローチは、主に B スプライン曲線、二次曲面スプライン、T スプライン曲線、不均一な有理 B スプラインなどの補間関数に基づいている⁽¹⁶⁾⁻⁽²¹⁾。これらの手法は任意の複雑な表面に適用できるが、表面を構成する密な点群が必要であり、計算量が膨大である。最近、Yi と Kim⁽²²⁾は、線、円弧、円、フィレットなどの基本的なパラメトリック関数を利用したトポロジー最適化結果の境界を特定する手法を提案している。この手法では、比較的少ないフィッティング変数で複雑な境界形状を処理できるが、非常に細い部分や孤立した島のない明確なトポロジー最適化結果が必要である。Liu ら⁽²³⁾は、いくつかの前処理ステップ後に適応型 B スプライン

ンフィッティング法を用いてトポロジー最適化結果を平滑なパラメトリック CAD モデルに変換する方法により、積層造形用のステレオリソグラフィ（STL）モデルを提示した。しかし、そのほとんどはパラメトリック法である。これらの手法は設計変数を減らすために有効であるが、特に複雑な構造の場合、時間のかかる形状パラメータ化処理が事前が必要となる。さらに、得られた形状は、パラメータ化プロセスに強く影響されてしまい、パラメータ依存性が避けられない。

1.5 研究の目的

これまでのトポロジー最適化で取り扱われている構造設計問題の大半は、弾性構造体を対象としたもので、弾塑性、特に繰り返し弾塑性を考慮した非線形問題を対象としたトポロジー最適化はほとんど取り扱われていない。このため本研究では、材料非線形問題としてせん断型パネルダンパーを例として取り上げ、せん断型パネルダンパーにおいて重要な能力である変形能力の最大化を目的として弾塑性を考慮したトポロジー最適化を行った。この際、局所測度のミニマックス問題は最大測度の局所性による飛び移りが発生する問題を内包している。この問題に対応するため、変形能力の指標である最大累積相当塑性ひずみに対して、最大値を評価するために用いられる KS 関数⁽²⁴⁾⁻⁽²⁶⁾を適用する。

また、トポロジー最適化による構造最適化問題において物体領域と非物体領域の境界特定は、構造最適化によって得られた構造物を実際に取り扱う際に極めて重要である。トポロジー最適化結果に対して、4.2 節にて述べる局所解脱出の問題の回避と領域境界の特定のため、まずは応答曲面法を用いて最適形状の特定を行う。次に、応答曲面法はパラメトリックな手法であり、最適化計算には人為的なコストが掛かるため、本研究ではノンパラメトリックな境界特定手法を構築し、いくつかの線形問題を対象に検証を行う。

1.6 論文の構成

本研究では、弾性・弾塑性挙動を考慮した密度法変動型トポロジー最適化結果を基に、その結果を実設計に適用するため、物体領域と非物体領域の境界を特定するための手法を構

築した.

本論文は 6 章で構成され, 次章以降の構成は以下の通りである.

第 2 章弾塑性構造体のトポロジー最適化手法では, 弾性構造体を対象としたトポロジー最適化について, その概要と本研究で対象とする密度法に基づくトポロジー最適化システムの構築に必要な感度解析, フィルタリング法, 最適化基準法などの理論をまとめた. また, 平均コンプライアンス最小化問題を例として定式化し, 密度法を用いてトポロジー最適化システムの構築を行った.

第 3 章繰り返し弾塑性を考慮したせん断型パネルダンパーのトポロジー最適化では, 弾塑性構造体を対象としたトポロジー最適化問題の例として, 低降伏点鋼を用いたせん断型パネルダンパーを取り上げ, 繰り返し弾塑性を考慮したトポロジー最適化システムの構築を行った. まず, 材料非線形解析に必要な降伏条件式, 硬化則などの基礎理論について説明し, 最適化問題を最大累積相当塑性ひずみ最小化問題として定式化した. このとき, 局所測度のミニマックス問題には最大測度の局所性により飛び移りの可能性があるため, KS 関数⁽²⁴⁾⁻⁽²⁶⁾を導入し, 領域変動に対して微分不可能を回避した. その結果, 体積制約の下で, 低降伏点鋼せん断型パネルダンパーに必要とされる変形能力の指標である最大累積相当塑性ひずみの最小化に成功した. さらに, 最大累積相当塑性ひずみと体積, エネルギー吸収量の相関を明らかにした.

第 4 章パラメトリック手法によるせん断型パネルダンパーの形状最適化では, 第 3 章で得られたせん断型パネルダンパーのトポロジー最適化結果を参考にして形状のパラメータ化を行った後, 実験計画法を用いた応答曲面法に基づいてエネルギー吸収量の制約の下で, パラメトリック手法によるせん断型パネルダンパーの形状最適化を行った. その結果, せん断型パネルダンパーの変形能力を向上させるとともに, 機械的特性が明瞭な形状を得ることができた. しかし, パラメトリック手法ではパラメータの依存性が高く, トポロジー最適化結果と差異が見られた. また, パラメータ化プロセスには専門的で高度な知識を必要とするため, 経験や勘に頼らないノンパラメトリック手法が必要であることを確認した.

第 5 章ノンパラメトリック境界特定手法では, 密度法を用いたトポロジー最適化結果に

対し、明確で滑らかな境界を特定できる手法を提案し、パラメータ化プロセスを含まないシステムを構築した。この手法における境界平滑処理の各プロセスは簡単な差分式で示され、高い計算コストを必要としない。また、汎用 FEM コードと組み合わせた自動化システムに実装できるため、大規模な設計問題への適用も可能である。いくつかの数値例を通して本システムの有効性と実用性が検証され、トポロジー最適化結果に基づいて直接製造可能な幾何形状を持つ構造の創成ができた。さらに、得られた結果を STL モデルに変換し、市販の熱溶解積層方式(FDM 方式)の 3D プリンターで製造できることを確認した。

最後に第 6 章結論では本論文のまとめを行う。

参考文献

- (1) Maute, K., Schwarz, S. and Ramm, E., Adaptive topology optimization of elastoplastic structures, *Structural Optimization*, Vol. 15 (1998), pp. 81-91.
- (2) Yuge, K. and Kikuchi, N., Optimization of a frame structure subjected to a plastic deformation, *Structural Optimization*, Vol. 10 (1995), pp. 197-208.
- (3) Ohsaki, M. and Arora, J.S., Design sensitivity analysis of elastoplastic structures, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, No. 5 (1994), pp. 737-762.
- (4) 加藤準治, 干場大也, 高瀬慎介, 寺田賢二郎, 京谷孝史, 弾塑性複合材料のトポロジー最適化における解析的感度の精度検証, *日本計算工学会論文集*, Vol. 2014 (2014), ID: 20140012.
- (5) 干場大也, 加藤準治, 高瀬慎介, 寺田賢二郎, 京谷孝史, 弾塑性材料の繰り返し載荷を考慮したマルチフェーズトポロジー最適化及び解析的感度の精度検証, *土木学会論文集 A2(応用力学)*, Vol. 70, No. 2 (2014), pp. 317-328.
- (6) Kleiber, M. and Kowalczyk, P., Sensitivity analysis in plane stress elasto-plasticity and elasto-viscoplasticity, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 137, No. 3-4 (1996), pp.395-409.
- (7) Nam, H., K., Kyung, K., C. and Jiun., S., C., Shape design sensitivity analysis and optimization

- of elasto-plasticity with frictional contact, *AIAA Journal*. Vol. 38, No. 9 (2000), pp. 1742-1753.
- (8) Kumar, A.V. and Gossard, D.C., Synthesis of Optimal Shape and Topology of Structures, *Journal of Mechanical Design*, Vol.118, No.1 (1996), pp.68-74.
 - (9) Hsu, Y.L., Hsu, M.S., and Chen, C.T., Interpreting results from topology optimization using density contours, *Computers & Structures*, Vol.79, No.10 (2001), pp.1049-1058.
 - (10) Hsu, M.H., and Hsu, Y.L., Interpreting three-dimensional structural topology optimization results”, *Computers & Structures*, Vol.83, No.4-5 (2005), pp.327-337.
 - (11) Li, C., Kim I.Y., and Jeswiet, J., Conceptual and detailed design of an automotive engine cradle by using topology, shape, and size optimization, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol.51 (2015), pp.547-564.
 - (12) Larsen, S., and Jensen, C.G., Converting topology optimization results into parametric CAD models, *Computer-Aided Design and Applications*, Vol.6, No.3 (2009), pp.407-418.
 - (13) Lin, C.Y., and Chao, L.S., Automated image interpretation for integrated topology and shape optimization, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol.20 (2000), pp.125-137.
 - (14) Zegard, T., and Paulino, G.H., Bridging topology optimization and additive manufacturing”, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol.53 (2016), pp.175-192.
 - (15) Yildiz, A.R., Öztürk, N., Kaya, N., and Öztürk, F., Integrated optimal topology design and shape optimization using neural networks, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol.25 (2003), pp.251-260.
 - (16) Marsan, A.L., and Dutta, D., Construction of a surface model and layered manufacturing data from 3D homogenization output, *Journal of Mechanical Design*, Vol.118, No.3 (1996), pp.412-418.
 - (17) Tang, P.S., and Chang, K.H., Integration of topology and shape optimization for design of structural components, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol.22 (2001), pp.65-82.
 - (18) Papalambros, P.Y., and Chirehdast, M., An integrated environment for structural configuration design, *Journal of Engineering Design*, Vol.1, No.1 (1990), pp.73-96.

- (19) Chang, K.H., and Tang, P.S., Integration of design and manufacturing for structural shape optimization, *Advances in Engineering Software*, Vol.32, No.7 (2001), pp.555-567.
- (20) Koguchi, A., and Kikuchi, N., A surface reconstruction algorithm for topology optimization, *Engineering with Computers*, Vol.22 (2006), pp.1-10.
- (21) Chacón, J.M., Bellido, J.C., and Donoso, A., Integration of topology optimized designs into CAD/CAM via an IGES translator, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol.50 (2016), pp.1115-1125.
- (22) Yi, G., and Kim, N.H., Identifying boundaries of topology optimization results using basic parametric features, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol.55 (2017), pp.1641-1654.
- (23) Liu, S.T., Li, Q.H., Liu, J.H., Cheng, W.J., and Zhang, Y.C., A realization method for transforming a topology optimization design into additive manufacturing structures, *Engineering*, Vol.4 (2018), pp.277-285.
- (24) Kreisselmeier, G. and Steinhauser, R., Systematic control design by optimizing a vector performance index”, *International Federation of Active Controls Symposium on Computer-Aided Design of Control Systems*, Vol.12, No.7 (1979), pp.113-117.
- (25) 下田昌利, 畔上秀幸, 桜井俊明, 形状最適化におけるミニマックス問題の数値解法 (最大応力と最大変位の最小設計), *日本機械学会論文集 A 編*, Vol.63, No.607(1997), pp.610-617.
- (26) 下田昌利, 米倉正人, 劉陽, 最大応力最小化を目的とするシェル構造体のフリーフォルム最適化, *日本機械学会論文集*, Vol.81, No.821(2015), pp.1-16.

第2章 弾性構造体のトポロジー最適化手法

2.1 トポロジー最適化

トポロジー最適化とは、構造の初期設計空間内の最適な材料分布を決定するために設計の初期段階で実行される高度な設計手法である。寸法最適化や形状最適化と比較して、これは最も自由度が高い構造最適化手法であり、従来の設計手法では入手が困難な軽量で高性能な構造を得ることができる。トポロジー最適化の基本的な考え方は、最適設計問題を最適化過程で形状が変化しない固定設計領域 D における材料分布問題に置き換えることにある。すなわち、構造物 Ω を設計領域 D 内に分布する物体領域 Ω と捉えなおすことで、設計領域内における物体領域 Ω と相補的な $D \setminus \Omega$ の最適な分布を求めることが基本コンセプトである。しかし、固定設計領域 D 内における特性関数は不連続性を許容しており、数値計算上では取り扱えない極めて複雑な構造を創出する可能性をもつ。このトポロジー最適化は、1988 年の Bendsøe と Kikuchi⁽¹⁾により工学分野に導入されて以来、トポロジー最適化は広範囲に研究され、多大な発展を遂げてきた。ここで提案されたのが均質化法に基づくトポロジー最適化法である。この方法の基本的な考え方は、周期的なマイクロストラクチャによって材料分布を表現し、このマイクロストラクチャのマクロな材料物性を均質化法⁽²⁾により評価するというものである。各要素とマクロな材料物性との対応関係は均質化法により導かれ、このマクロな材料物性は有限要素法などで目的関数や制約関数を計算する際に用いられる。この方法の問題として、得られる最適構造は多くのグレースケールを含み、工学的観点から製造不可能なものとなることが挙げられた。グレースケールを物理的に解釈すれば、その場所において非常に小さな空孔を多分に含んだ、所謂多孔質状態を示している。これとは別に、1989 年に Bendsøe によって提案された密度法に基づくトポロジー最適化⁽³⁾⁻⁽⁵⁾では、各要素内の材料充填の様相を表現するより簡便な方法として、0 から 1 までの値をとる正規化された仮想的な材料密度を導入している。ここで、0 であれば完全に空洞の状態であり、1 であれば完全に材料が充填されている状態、その中間値であればどちらともつかない状態を示す。こ

のとき、各要素の材料物性は以下のように極めて単純に与えられる。

$$E(\rho_i) = (E_1 - E_0)\rho_i^p + E_0 \quad (2.1)$$

ここで、 ρ_i は第 i 番目の要素の材料密度、 $E(\rho_i)$ はその要素の材料物性、 E_0 は完全に空洞の場合の物性値、 E_1 は完全に材料が充填されている場合の物性値、 p は中間的な材料密度に対するペナルティ係数であり、通常3から4の値である。また、この方法は等方性材モデルであることから SIMP 法(Solid Isotropic Material with Penalization)とも呼ばれる。この方法は均質化法を用いた方法としてはかなりグレースケールが生じにくい特長を持ち、式(2.1)で示されるような単純な関係式でマクロな材料物性を得られるため、非常に数値実装が容易である。

均質化法や密度法に基づくトポロジー最適化は材料分布の表現方法の特性上、得られた最適構造にグレースケールが広く残存する可能性を含むが、その問題を解決する方法として2000年に Sethian と Wiegmann によりレベルセット法に基づくトポロジー最適化⁽⁶⁾が提案された。レベルセット法⁽⁷⁾⁽⁸⁾は、レベルセット関数と呼ばれるスカラー関数の符号によって材料分布を表現する方法である。このレベルセット関数 $\phi(x)$ には次式に示す符号付き距離関数を用いるのが一般的である。

$$\phi(x) = \begin{cases} d(x) & \text{if } x \in \Omega \setminus \partial\Omega \\ 0 & \text{if } x \in \partial\Omega \subset D \\ -d(x) & \text{if } x \in D \setminus \Omega \end{cases} \quad (2.2)$$

ここで、 $d(x)$ は距離関数を示し、この関数を用いて、 Ω と $D \setminus \Omega$ の境界 $\partial\Omega$ をレベルセット関数のゼロ等位面(物体領域と空洞領域の境界)で表わす。ゼロ等位面近傍の要素はグレースケールとなるが、そのマクロな材料物性はゼロ等位面からの距離に応じて密度法と同様に簡便に与えられる。物体領域と空洞領域の境界をゼロ等位面で明確化できることによりグレースケールがゼロ等位面近傍の要素に限られることで上述の問題、得られた最適構造にグレースケールが広く残存する可能性が排除される。一方、レベルセット

関数の更新に伴いゼロ等位面が進展することから構造最適化が実現されるため、一つの物体領域が二つの物体領域に分離するような形態の変化は許容されるが、物体領域内に孔が開く形態の変化は許容されないため、形態の変化にある種の制限がつく。また、トポロジー最適化では、現状グレースケールを完全に含まない明確な境界を持つ最適形状の創出が行えないという共通の問題を内包している。

トポロジー最適化によって得られる形状は、前述の通り自由度が高く、構造物の形態をも変更可能なことから、工学的な要件を満たしているだけでなく熟練設計者の経験や従来の設計手法からは求めることのできないような斬新なデザインとなることが多くあるため、非常に注目が高まっている手法である。しかし、トポロジー最適化の性質上、実設計への展開が困難である場合が多いため、実設計の現場では設計プロセスの初期検討段階、概念設計にトポロジー最適化を利用し、その得られた形状を基に設計をスタートさせることによって設計の試行錯誤回数を劇的に削減するだけではなく、画期的な軽量化を達成させるといった利用の仕方がなされている。本章では、トポロジー最適化の手法について記述するが、均質化法とレベルセット法は概説にとどめ、主に本研究で用いた密度法の詳細を述べる。

2.2 トポロジー最適化の手法

トポロジー最適化の代表的な手法は前述の通り、均質化法、密度法、レベルセット法があ

Table2.1 Comparison of three methods of topology optimization

	均質化法	レベルセット法	密度法
メリット	<ul style="list-style-type: none"> ・空隙を持つ複合材料を用いているため、物理的な意味がはっきりしている 	<ul style="list-style-type: none"> ・外形形状が明瞭 ・振動問題, 熱伝導, 流体, 電気など, 様々な分野への応用が容易 	<ul style="list-style-type: none"> ・計算速度が速い ・簡易的な手法であり, プログラムの制作が容易
デメリット	<ul style="list-style-type: none"> ・設計変数が多く, 計算アルゴリズムが複雑 ・外形形状が不明瞭 	<ul style="list-style-type: none"> ・非常に多くの反復計算が必要 ・形態の変化に一部制限 	<ul style="list-style-type: none"> ・外形形状が不明瞭 ・チェッカーボードが発生しやすい

る．トポロジー最適化の 3 つの手法の比較を表 2.1 に示す．

2.3 均質化法

トポロジー最適化手法で最初に提案されたものが均質化法(Homogenization method)である．均質化法においては，各有限要素内の材料充填の様相と材料異方性を周期的なマイクロストラクチャで表現している．均質化法の特徴は，大域的な座標と局所的な座標を導入し，両者の関係性を漸近展開により得られるマルチスケールの変数で結びつけることにより，マイクロストラクチャレベルの局所的な物理特性とともに，大域的な物理特性を求めることにある．複合材料などの均質化された物理特性を理論的に求める考え方はそれほど新しくはなく，1950 年代から本格的に研究されてきた．特に，Hashin⁽⁹⁾の研究はこの分野における最も基本的なものといえる．その後，均質化法を用いたトポロジー最適化法を最初に提案したのが 1988 年の Bendsøe と Kikuchi の論文⁽¹⁾である．これらの詳細の説明については本論の論旨に則さないことから省略する．

2.4 レベルセット法

レベルセット法は，1988 年に Osher と Sethian⁽¹⁰⁾によって初めて提案された手法である．当時のレベルセット法は形状最適化手法の一つとして利用されていた．外形形状を一次元高位のレベルセット関数で表現し，外形形状の変動をレベルセット関数の変動に置き換えて最適化を行っていた．レベルセット法は基本的に形状最適化の考え方であるため，外形形状の最適化が可能であるのに対し，孔のような形態の創出は不可能とされていた．この問題に対して，孔を創出するいくつかの方法が提唱され，2000 年に Sethian と Wiegmann によりレベルセット法に基づくトポロジー最適化⁽⁶⁾が初めて提案された．その詳細の説明については本論の論旨に則さないことから省略する．

2.5 密度法

前述の均質化法では，マイクロストラクチャレベルの設計変数を設定し，数学的に厳密に求めることが可能であるが，数値計算に難がある．また，この手法において各有限要素内の

材料充填の様相と材料異方性を周期的なマイクロストラクチャで表現する．しかし，そのように細部まで厳密に求めなくても定常的な傾向さえ示す関数を利用すれば最適化としては事足りる．このような観点から，密度法では，各要素内の材料充填の様相を表現するより簡便な方法として，各要素に仮想的な材料密度 ρ を 0 から 1 までの値として与えることで表現している．均質化された弾性テンソル E^H を 0 から 1 の間で正規化された密度のみの関数として，

$$E^H = Ef(\rho) \quad (2.3)$$

と表わし，この式に密度が 0 のときに弾性テンソルが 0，密度が 1 のときに E となる条件を満足するように，

$$E^H = E\rho^p \quad (2.4)$$

と表わす．ここで p はペナルティーパラメータと呼ばれ，通常 3 から 4 の値を用いるのがよいとされているが，物理的な根拠に乏しい方法である．式(2.3)が等方性材料としての挙動を示すことから，この式を用いた設計空間の緩和法が **SIMP** 法と呼ばれている．この方法は簡易に定式化を行えるとともに，プログラムの作成も容易である．材料密度が 1 であれば材料が完全に充填されている状態を表わし，0 であれば完全に空洞の状態である．0 でも 1 でもない値であれば材料とも空洞ともつかない中間的な状態となる．このように各要素に導入された材料密度によって材料分布を表現する方法を密度法と呼ぶ．

2.6 密度法に基づくトポロジー最適化の流れ

図 2.1 に本研究におけるトポロジー最適化のフローチャートを示す．この中で，色つきの枠は手作業であることを示している．詳細な内容は次節以降に記すため，本節では全体的な流れのみを説明する．トポロジー最適化の最初のステップは，設計領域および設計条件の設定を行う．設計領域は，求める性能を有した構造物が存在してもよい設計範囲であり，他の部品との干渉が生じる箇所など，設計対象としない空間は設計領域外とする．この設計領域 D は最適化の途中で変更不可である．そのモデルに対して固定条件 Γ_u ，荷重条件 Γ_f などの境

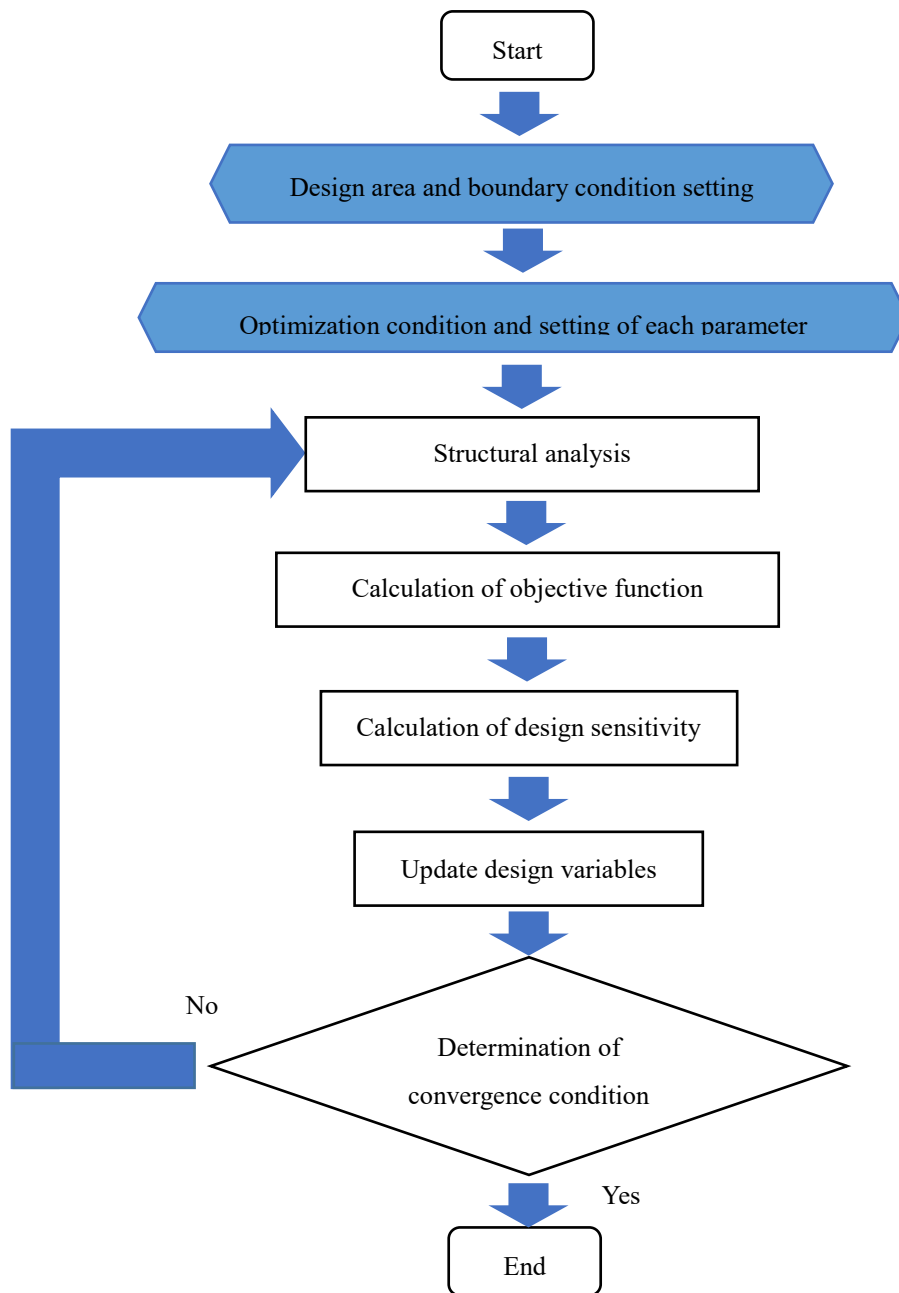


Fig.2.1 Flowchart of the topology optimization method

界条件を設定し、これらの条件も途中で変更不可である。

次に、設計問題の定式化を行い、最適化条件と各パラメータの設定を行う。正規化された体積密度 ρ と体積の上限値 Ω_0 の初期値を設定する。通常、体積密度は設計領域内全域で均一とするが、問題に応じて変更しても構わない。また、体積密度は理論上 1 から 0 までの値

をとるが、数値解析上の特異性を回避するために最小値を十分に小さい値(例えば 0.001)とする。また、今回の手法では、体積密度を離散化された設計変数として実装するにあたり、設計変数を各々の要素に設定している。このため、設計変数は要素内では一定の値をとるが、隣り合う要素同士ではお互いに独立した値をとることが可能であることから、設計変数は C^1 程度の連続性をもつ。よって、この方法ではチェッカーボードを許容するため、フィルタリング法を用いてチェッカーボードパターンを除去する方法を利用する手続きが必要となる。密度法の場合、以下のように定式化される。

$$\text{Design variables : } \rho \quad (2.5)$$

$$\text{Objective function : minimize or maximize } f(\rho) \quad (2.6)$$

$$\text{Constraint condition : } g = \int_D \rho d\Omega - \Omega_0 \leq 0, \quad \rho_i^L \leq \rho_i \leq \rho_i^U \quad (2.7)$$

その後、このモデルに対して与えられた条件下で構造解析を行い、応力や変位などの各結果を得る。そうして得た結果を基に 2.7.2 項に示す感度を計算する。さらに、計算された感度を基に設計変数である要素の密度を変更し、各要素の必要性を判断する。必要性が低い要素は順次無くして行き、制約条件である体積制約を満たしつつ最小または最大の目的関数を得られるように構造解析以降を繰り返す。以上の流れを通ることで設計空間の不要な部分が削られ、制約条件を満たした構造として必要な部分のみが残った形状が創出されることになる。次節に密度法をトポロジー最適化のプログラムに実装するにあたって必要な手法について記していく。

2.7 最適化の方法

トポロジー最適化の問題は、ある設計変数に対して一つまたは複数の制約の下で目的関数を最小化あるいは最大化する問題として記述できる。ここで、最大化問題では目的関数にマイナスをつけることにより最小化問題として取り扱うことができる。本節では、この問題を n 個の設計変数 $x^T = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_n]$ の下で目的関数 f の最小化として以下に定式化し、最適化の方法について述べる。

$$\text{Objective function : minimize } f(x) \quad (2.8)$$

$$\text{Constraint condition : } \begin{aligned} &g(x) \leq 0 \\ &x_i^L \leq x_i \leq x_i^U \quad (i=1,2,\dots,n) \end{aligned} \quad (2.9)$$

有限要素にはどのような定式化のものを利用してもよいが、一般的に広く利用されている変位法に基づく双一次形状関数のアイソパラメトリック要素を用いると、せん断応力の過大評価により、多くのチェッカーボードパターンを生成する場合が多い⁽¹¹⁾。このような問題を解決するには、フィルタリング法を用いたり、形状関数を高次の関数にしたりなどすればよい。なお、本研究ではフィルタリング法を用いており、詳細は後述する。

2.7.1 ラグランジュ未定乗数法

ラグランジュ未定乗数法(Method of Lagrange multiplier)とは、いくつかの制約条件の下で最適化を行うための数学的な方法である。いくつかの変数に対し、いくつかの関数の値を固定するという制約条件の下、別のある1つの関数の極値を求めるという問題を考える。このとき、各制約条件に対して未定乗数(Lagrange multiplier)を用意し、これらを係数とする線形結合を新しい関数として考えることで、制約問題を通常の極値問題として解くことができる。式(2.8)、(2.9)に対して以下のようにラグランジアン L を考える。

$$L = f(x) + \Lambda g(x) + \sum_{i=1}^n \left\{ \lambda_{-i} (-x_i + x_i^L) + \lambda_{+i} (-x_i - x_i^U) \right\} \quad (2.10)$$

ここで、 $\Lambda, \lambda_{-i}, \lambda_{+i}$ はラグランジュ未定乗数である。上式を偏微分して、

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} + \Lambda \frac{\partial g(x)}{\partial x_i} - \lambda_{-i} + \lambda_{+i} = 0 \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Lambda} = g(x) \leq 0 \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_{\lambda_{-i}}} = -x_i + x_i^L \leq 0 \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_{\lambda_{+i}}} = x_i - x_i^U \leq 0 \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (2.14)$$

$$\Lambda g(x) = 0 \quad (2.15)$$

$$\lambda_{-i} (-x_i + x_i^L) = 0 \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (2.16)$$

$$\lambda_{+i}(-x_i - x_i^U) = 0 \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (2.17)$$

$$\Lambda \geq 0, \quad \lambda_{-i} \geq 0, \quad \lambda_{+i} \geq 0 \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (2.18)$$

微分可能な非線形計画問題において，ラグランジュ乗数の存在が保証する制約想定を仮定したとき， x が局所的最適解となることの 1 次の必要条件となる．この条件は Kuhn と Tucker による論文⁽¹²⁾で示されたが，後に Karush が等価な条件を示していたことが判明したため，Karush-Kuhn-Tucker 条件または KKT 条件と呼ばれている．

2.7.2 感度解析

固定設計領域 D を有限要素により分割する．有限要素法で離散化した系の剛性方程式を，

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (2.19)$$

として変位ベクトル \mathbf{u} を求め，この変位ベクトル \mathbf{u} から必要な物理量を求める．ここで， \mathbf{K} と \mathbf{f} は，それぞれ剛性マトリクスと節点荷重ベクトルである．目的関数を次式と置く．

$$\theta = \mathbf{u}^T \mathbf{f} \quad (2.20)$$

ここで， \mathbf{f} を既知とし，式(2.10)を設計変数で偏微分すると，次のようになる．

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_e} \mathbf{u} + \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \rho_e} &= 0 \\ \Leftrightarrow \mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_e} \mathbf{u} &= -\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \rho_e} \end{aligned} \quad (2.21)$$

また，目的関数の感度は上式より，次式で表わされる．

$$\frac{\partial \theta}{\partial \rho_e} = \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial \rho_e} \mathbf{f} = -(\mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_e} \mathbf{u})^T \mathbf{f} = -\mathbf{u}^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_e} \right) (\mathbf{K}^{-1} \mathbf{f}) = -\mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_e} \mathbf{u} \quad (2.22)$$

特に，密度法において要素の密度を設計変数にとるならば，全体剛性に及ぼす要素密度の影響は要素剛性にのみ表われるため， e 番目の要素剛性を

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} d\Omega \quad (2.23)$$

と置くと、式(2.22)は、

$$\frac{\partial \theta}{\partial \rho_e} = -u_e^T \left(\int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \rho_e} \mathbf{B} d\Omega \right) u_e \quad (2.24)$$

となる．ここで、 Ω_e は各要素 e の領域と表面力の作用する領域、 \mathbf{B} は \mathbf{B} マトリクス、 u_e は各要素の変位ベクトルである．よって、感度は次のようになる．

$$\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \rho_e} = -p \rho_e^{p-1} u_e^T \mathbf{C}_0 u_e \quad (2.25)$$

また、材料の総使用量(総体積)は次式で表わされる．

$$\Omega = \sum_{i=1}^N \rho_i \Omega_i \quad (2.26)$$

よって、その感度は以下となる．

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \rho_e} = \Omega_i \quad (2.27)$$

2.7.3 フィルタリング法

要素密度を設計変数とする密度法に基づくトポロジー最適化では、要素に対し、全方向への均一な引張荷重もしくは斜め方向に荷重が加わる場合、せん断応力の過大評価によって図 2.2 に示すようなチェッカーパターンに要素が配置される現象であるチェッカーボードが発生する場合がある．このチェッカーボードを回避する方法として以下の方法がある．ここでは、周囲の要素の感度を用いて平滑化された感度 $\frac{\partial \theta}{\partial \rho_e}$ を以下の式により求める．

$$\frac{\partial \theta}{\partial \rho_e} = \frac{1}{\rho_i \sum_{j=1}^N H_j} \sum_{j=1}^N H_j \rho_j \frac{\partial \theta}{\partial \rho_j} \quad (2.28)$$

$$H_j = r_{fil} - \text{dist}(i, j) \{j \in N \mid \text{dist}(i, j) \leq r_{fil}\} \quad (2.29)$$

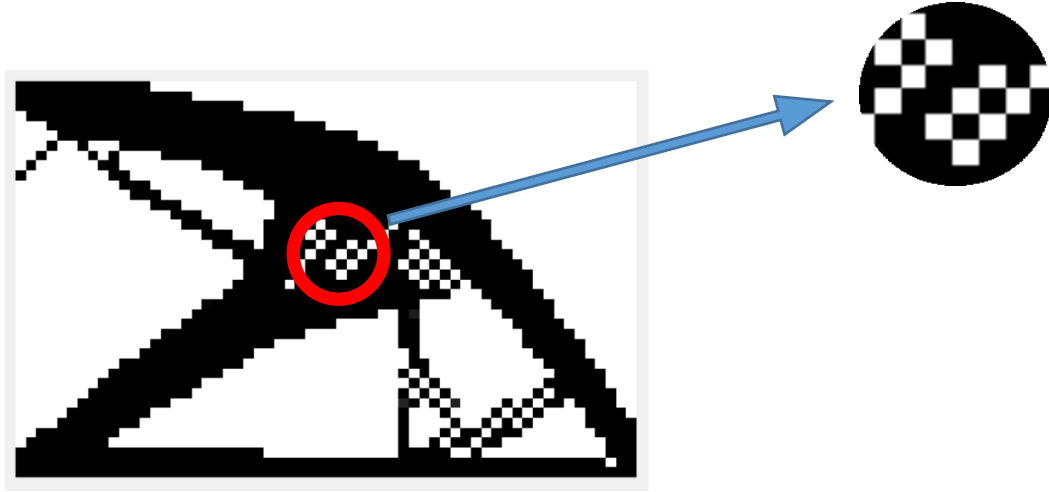


Fig.2.2 Checker board

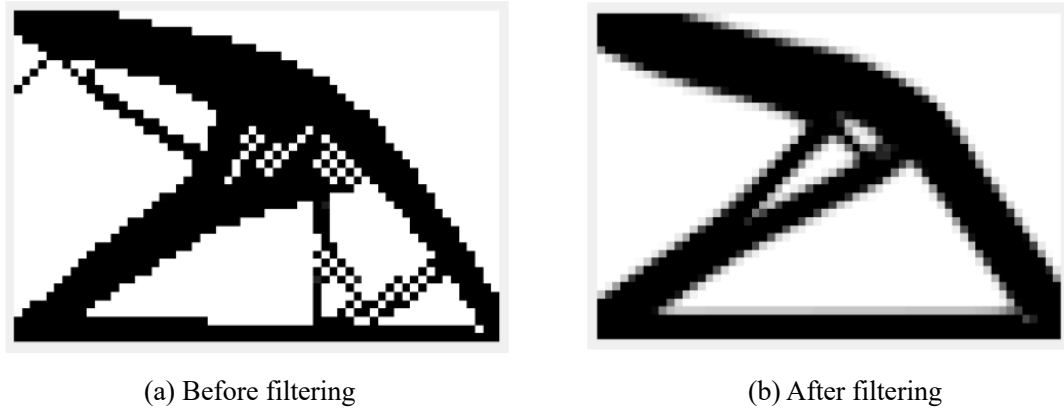


Fig.2.3 Filtering result

r_{fil} はフィルタリング半径であり, 構造メッシュである場合, 1 より大きくすることで式(2.19)が有効となる. また, H_j はフィルタリングの重みを示している. 着目する要素の r_{fil} 以下の距離にある要素を取り出し, その中で半径 r_{fil} 以内の距離にある要素の感度を平滑化している. 図 2.3 に式(2.28)の効果を示す.

2.7.4 最適化基準法

最適化基準法(Optimality criteria method)は, 上式の KKT 条件を満たす最適解を何らかのヒューリスティックスを用いて探し出す方法である. 本研究では, Bendsøe と Kikuchi⁽¹³⁾あるいは Suzuki と Kikuchi⁽¹⁴⁾等と同様に, 以下に導出するヒューリスティックスを用いている.

式(2.13)と式(2.14)の側面制約が両方とも非活性(等式制約で成立していない)であるとする
れば、式(2.16)と式(2.17)より $\lambda_{-i} = \lambda_{+i} = 0$ であるから、式(2.11)より、

$$\frac{\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}}{-\Lambda \frac{\partial g(x)}{\partial x_i}} = 1 \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (2.30)$$

よって、上式を満足する設計変数とラグランジュ乗数を得ることができれば、これが最適解
の候補となる。なお、最大化問題では、最大化問題を最小化問題に置き換えるため、マイナ
スを付した関数を目的関数とすれば、目的関数の設計変数に関する 1 次微分 $\partial f(x)/\partial x_i$ は式
(2.25)に示したように常に負になり、制約条件の設計変数に関する 1 次微分 $\partial g(x)/\partial x_i$ は式
(2.27)に示したように常に正であり、さらにラグランジュ乗数も正である。上式を満たす最
適解を探索する方法として、

$$x_i^{n+1} = x_i^n \left[\frac{\frac{\partial f(x)}{\partial x_i^n}}{-\Lambda^n \frac{\partial g(x)}{\partial x_i^n}} \right]^\eta = x_i^n (A_i^n)^\eta \quad (2.31)$$

という設計変数の更新手続きを利用する。ここで、設計変数の上付きの文字 n は更新の回数
を意味する。 η (ダンピング係数)は定数で通常0.5~0.75に設定する。 A_i^n は繰り返し計算する
中で、常に1になるように更新されるため、各設計変数が式(2.30)を満足するよう更新されて
いくことになる。

式(2.30)は設計変数のもと限值と上限値に関する制約式が非活性という仮定のもとで導出
されているため、設計変数の更新の段階で、最初に設定した設計変数の上限値と下限値を超
えてしまう場合がある。そこで、ムーブリミット m を導入して式(2.30)を以下のように設計
変数が上限値と下限値を超えない更新手続きに変更する。

$$x_i^{n+1} = \min\{\max\{x_i^L, (A_i^n)^\eta\}, x_i^U\}$$

$$= \begin{cases} x_i^{L^n} & (x_i^n (A_i^n)^\eta \leq x_i^{L^n}) \\ x_i^n (A_i^n)^\eta & (x_i^{L^n} < x_i^n (A_i^n)^\eta < x_i^{U^n}) \\ x_i^{U^n} & (x_i^n (A_i^n)^\eta \geq x_i^{U^n}) \end{cases} \quad (2.32)$$

ここで、 $x_i^{L^{(k)}}$ と $x_i^{U^{(k)}}$ は、次式のようなムーブリミットを設けた範囲内でのみ更新できるようにする。

$$x_i^{L^n} = \max\{x_i^n - m, x_i^L\} \quad (2.33)$$

$$x_i^{U^n} = \min\{1, x_i^n + m\} \quad (2.34)$$

以上の最適性基準法は、全ポテンシャルエネルギー最大化問題とともに、平均コンプライアンス最小化問題では非常に高い収束性を示すが、他の一般的な問題にそのまま適用することはできない場合がある。特に、式(2.11)が体積制約を非活性、すなわち、ラグランジュ乗数 Λ がゼロの場合や、目的関数の設計変数に関する1次微分 $\partial f(x)/\partial x_i$ が正になることがある場合、式(2.32)の更新手続きは利用できなくなり、何らかの工夫が必要となる。このような場合は、最適性基準法より、逐次線形計画法(Sequential Linear programming, SLP)⁽¹⁵⁾や、逐次凸関数近似法⁽¹⁶⁾⁽¹⁷⁾を利用した方がよい。

2.8 トポロジー最適化プログラム

2.7 節に示したトポロジー最適化を参考に、実際にトポロジー最適化プログラムを作成する流れに沿って記述していく。

2.8.1 トポロジーパラメータの設定

トポロジー最適化において、2.5, 2.7 節で述べたように幾つかのパラメータを設定する必要がある。本研究では、以下のパラメータを使用している。

Penalization power: ペナルティーパラメータ(2.5 節参照)

Rfir: フィルタリング半径 (2.7.3 項参照)

Positive move limit: ムーブリミット (2.7.4 項参照)

Damping coefficient: ダンピング係数 (2.7.4 項参照)

Constraint condititon: 制約条件 (制約条件は体積制約値)

2.8.2 最適化計算の定式化

正規化された要素密度 ρ を設計変数とし, 平均コンプライアンス最小化問題を例とする.
その定式化は以下のようになる.

$$\text{Design variables : } \rho \quad (2.35)$$

$$\text{Objective function : minimize } l(\rho) \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} \text{Constraint condition : } g &= \int_D \rho d\Omega - \Omega_o \leq 0 \\ \rho_i^L &\leq \rho_i \leq \rho_i^U \end{aligned} \quad (2.37)$$

ここで, 設計変数の下限値 ρ_i^L は, 数値解析上の特異性を回避するために 0 ではなく十分に小さい値として 0.001 とする.

2.8.3 感度解析

2.7.4 項で述べた式(2.30)を計算するのに必要な設計感度は 2.7.2 項で述べたように,

$$\frac{\partial l}{\partial \rho_e} = -\mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_e} \mathbf{U} \quad (2.38)$$

ここで, 系の剛性マトリクス \mathbf{K} の偏微分の項は着目する要素の剛性マトリクスに対してのみ値を持ち, ほかの要素に関しては 0 であるため, 要素の剛性マトリクス k_i を考えればよい. よって, 上式は Σ 記号を用いて表わすと,

$$\frac{\partial l}{\partial \rho_e} = -\sum_i \mathbf{U}^T \frac{\partial k_i}{\partial \rho_e} \mathbf{U} \quad (2.39)$$

となり, 要素の積分点を j と置くと, 式(2.23)は,

$$\mathbf{k}_e = \sum_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C}_i \mathbf{B} \quad (2.40)$$

となり, 式(2.24)より,

$$\mathbf{C}_i = E_i(\rho_i)\mathbf{C}_0 \quad (2.41)$$

式(2.40), (2.41)および, 弾性係数 E_i と設計変数 ρ_i の関係性を式(2.3)で定義した等方性材料であるとして,

$$\frac{\partial k}{\partial \rho_e} = -p\rho_e^{p-1} \sum_j \mathbf{B}^T \mathbf{C}_0 \mathbf{B} \quad (2.42)$$

となる. ただし, これは線形解析の場合の感度である. 非線形解析においての感度の導出は非常に複雑であり, 正確に導出することが現状困難であるため, 本研究では目的関数を感度の代わりとして設計変数の更新の際に用いている. 一方, 体積制約の感度は式(2.27)より,

$$\frac{\partial v}{\partial \rho_e} = 1 \quad (2.43)$$

また, フィルタリングにおいて周囲の感度を平滑化する方法を用いるため, 式(2.28)と同様に,

$$\frac{\partial \theta}{\partial \rho_e} = \frac{1}{\rho_i \sum_{j \in S_e} H_j} \sum_{j \in S_e} H_j \rho_j \frac{\partial \theta}{\partial \rho_i} \quad (2.44)$$

ここで, S_e はフィルタリング半径内にある要素の集合を示している. また, H_j は畳み込み演算であり, 次式で表わされる.

$$H_j = r_{fil} - \text{dist}(i, j) \quad \{j \in N \mid \text{dist}(i, j) \leq r_{fil}\} \quad (2.45)$$

2.8.4 設計変数の更新

上述の設計感度を基にラグランジュ乗数を求め, 設計変数をどのように変化させるかを求めていく. その際に式(2.32)で示したムーブリミットの考え方を導入し, 制約条件の一つである $\rho_i^L \leq \rho_i \leq \rho_i^U$ を満足するように調整する. 参考のために, 式(2.32)-(2.34)より,

$$\rho_i^{n+1} = \min\{\max\{\rho_i^L, (A_i^n)^\eta\}, \rho_i^{U^n}\}$$

$$= \begin{cases} \max\{\rho_i^n - m, \rho_i^{L^n}\} & (\rho_i^n (A_i^n)^\eta \leq \rho_i^{L^n}) \\ \rho_i^n (A_i^n)^\eta & (\rho_i^{L^n} < \rho_i^n (A_i^n)^\eta < \rho_i^{U^n}) \\ \min\{1, \rho_i^n + m\} & (\rho_i^n (A_i^n)^\eta \geq \rho_i^{U^n}) \end{cases} \quad (2.46)$$

上式を用いて設計変数の変化量を制限した結果を式(2.30)に示した下式に代入し，設計変数を更新する．

$$\frac{\frac{\partial f(\rho)}{\partial \rho_i}}{-\Lambda \frac{\partial g(\rho)}{\partial \rho_i}} = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.47)$$

2.9 プログラムの全体の流れ

まず，有限要素モデルの作成およびパラメータの設定を行い，汎用有限要素解析ソフトにて構造解析する．その結果からひずみや応力などの必要な情報を読み取り，感度解析，感度のフィルタリング，設計変数の更新，収束判定の順に行い，更新された設計変数を有限要素モデルに反映し，再び構造解析に戻る．この手順を収束するまで繰り返す．収束判定では，いくつか方法が考えられるため，例として以下にいくつか示す．

- ・ 設計変数の最も大きな変動量が任意の数値以下であるか
- ・ 規定回数以上の間に所望の性能向上がみられないかどうか
- ・ 任意の性能向上の上昇割合が規定量を下回るかどうか
- ・ 前回の最適化計算に比べ任意の性能が低下したかどうか
- ・ 任意の回数の最適化計算を行ったかどうか

このような方法が考えられるため，目的によって収束判定の仕方を決めることになる．

参考文献

- (1) Bendsøe, M. P. and Kikuchi, N., Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.71 (1988), pp.197-224.
- (2) 寺田賢二郎, 菊池昇, 均質化法入門, 丸善株式会社, (2013).
- (3) Bendsøe, M. P., Optimal shape design as a material distribution problem, *Structural Optimization*, Vol.1, No.4(1989), pp.193-202.
- (4) Bendsøe, M.P. and Sigmund, O., Material interpolation schemes in topology optimization, *Archive of Applied Mechanics*, Vol.69 (1999), pp.635-654.
- (5) 西脇眞二, 西垣英一, 鶴見康昭, 小島芳生, 菊池昇, 1406 First Order Analysis における最適設計法 : 梁要素とパネル要素に基づいたトポロジー最適化, *設計工学・システム部門講演会講演論文集*, Vol.10 (2001), pp.118-121.
- (6) Sethian, J.A. and Wiegmann, A., Structural boundary design via level set and immersed interface methods, *Journal of Computational Physics*, Vol.163, No.2 (2000), pp.489-528.
- (7) Allaire, G., Jouve, F. and Toader, A.M., A level-set method for shape optimization, *Comptes Rendus Mathematique*, Vol.334 (2002), pp.1125-1130.
- (8) 山田崇恭, 山崎慎太郎, 西脇眞二, 泉井一浩, 吉村允孝, レベルセット法に基づく構造最適化における設計領域境界設定に関する一考察, *日本応用数理学会論文誌*, Vol.18, No.3 (2008), pp.487-505.
- (9) Hashin, Z. and Shtrikman, S., A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol.11, No.2, pp.127-140.
- (10) Osher, S. and Sethian, J. A., Front propagating with curvature dependent speed: Algorithms based on hamilton-jacobi formulations, *Journal of Computational Physics*, Vol.78(1988), pp.12-49.
- (11) 西脇眞二, 泉井一造, 菊池昇, トポロジー最適化, 丸善出版 (2013), pp.91-92.
- (12) Kuhn, H. W. and Tucker, A.W., Nonlinear Programming, in *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, Vol.2, No.1(1961), pp.481-492.

- (13) Bendsøe, M. P. and Kikuchi, N., Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.71(1988), pp.891-909.
- (14) Suzuki, K. and Kikuchi, N., A homogenization method for shape and topology optimization, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.93, No.3(1991), pp.291-318.
- (15) 寺島周平, 最適設計のための非線形計画法ライブラリの開発—その 1 逐次線形計画法—, *職業能力開発報文誌*, Vol.8, No.1(1996), pp.75-77.
- (16) Fleury, C. and Braibant, V., Structural optimization: A new dual method using mixed variables, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.23, No.3(1986), pp.409-428.
- (17) Svanberg K., The method of moving asymptotes—a new method for structural optimization, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.24, No.2(1987), pp.359-373.

第3章 繰り返し弾塑性を考慮したせん断型パネルダンパーの トポロジー最適化

3.1 はじめに

本章では、弾塑性を考慮したトポロジー最適化問題を取り扱う。この問題に関する用語をまとめ、材料の繰り返し弾塑性問題例として、低降伏点鋼せん断型パネルダンパーを取り上げてトポロジー最適化を行った結果を示す。

3.2 先行研究

低降伏点鋼を用いたせん断型パネルダンパー(SPD: Shear Panel Damper)はエネルギー吸収性能に優れ、構造が単純で安価であるため、建築分野では従来からせん断型パネルダンパーに関して多くの研究⁽¹⁾⁻⁽³⁾がなされ、制震対策として曲げモーメントが小さくせん断力が集中する部位に用いた事例が建築構造物に多く、既に実用的に高層ビル等に広く用いられている。また、近年免震ゴム支承の代わりに橋梁にもせん断型パネルダンパーを用いることが提案されてきている。しかし、ビルなどの構造物に使用する場合にはせん断変形角は大きくても5%程度であり、橋梁構造物に用いられている免震ゴム支承の250%に比べると非常に小さなものであるため、従来のものよりかなり大きな変形に耐えられるせん断型パネルダンパーの開発が要求される。

せん断型パネルダンパーの形状変更による変形能力の向上に関して幾つかの研究⁽⁴⁾⁻⁽⁶⁾が行われてきたが、いずれも実験や数値解析により、経験的もしくは形状パラメータのケーススタディによって形状決定が行われてきた。これまではせん断型パネルダンパーの性能向上について、リブを設けて補強する方法なども研究⁽⁵⁾⁽⁶⁾されてきたが、Liu ら⁽⁷⁾によってせん断型パネルダンパーの側部を削る方法が提案され、溶接を必要とせずに最大累積相当塑性ひずみを82.2%減少させた。

3.3 有限要素法による弾塑性解析

弾塑性体に対する有限要素法では、弾性解析での変位や荷重を、変位増分あるいは荷重増

分のように読み替えて繰り返し適用し，得られたひずみ増分や応力増分の和を求めていく．
 塑性ひずみと応力の関係づけの代表的なものに流れ則(Flow rule)があり，通常弾塑性体を記述する場合，弾性域の応力ひずみ関係に加え，以下の3つの性質により材料は特徴づけられる．

- ・降伏条件：弾性変形状態にある材料が塑性変形を生じるために必要な応力の条件
- ・流れ則：降伏後の塑性ひずみ増分を現時刻での応力速度と関連付けるもの
- ・硬化則：塑性流れの進行中に降伏条件がどのように変化するかを表わすもの

弾性範囲内であれば外力に伴う変形は外力値のみに依存し，载荷の履歴には無関係であるが，降伏応力を超える载荷が加えられる場合には非可逆的な永久変形である塑性変形が残る．塑性変形が残るような载荷条件の実験では，外力に伴う変形に载荷の履歴が関係する．具体的には，初期の降伏条件は，3次元的な変形をしている物体内の応力をスカラー量である相当応力に変換し，相当応力が弾性限界に達したら塑性変形が開始すると判定する．また，変形途中で除荷が発生し，再び負荷された際には相当応力が弾性限界に達したときに塑性変形が再開すると判定する．

3.4 応力の不変量

降伏条件について記述する際に必要になる応力の不変量についてまとめる．まず，任意の面に作用する応力ベクトル $t^{(n)}$ は，面に対する法線単位ベクトル $n = \{n_x \ n_y \ n_z\}^T$ を用いて，

$$t^{(n)} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \sigma \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

であり，せん断応力は共役関係($\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}$)を示すため，式(3.1)より，

$$\begin{bmatrix} (\sigma_x - \sigma) & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma) & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.2)$$

ここで，もしこの係数マトリクスの行列式が0以外であるならば逆行列が存在し，式(3.2)の

両辺にその逆行列を左からかけると $n_x = n_y = n_z = 0$ となる。しかし、 \mathbf{n} は単位ベクトルのため $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$ であるはずである。よって、次式が成り立つ。

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma) & \tau_{yz} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma) & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma) \end{vmatrix} = 0 \quad (3.3)$$

式(3.3)を展開して、

$$\begin{aligned} & (\sigma_x - \sigma)(\sigma_y - \sigma)(\sigma_z - \sigma) + \tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} + \tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - (\sigma_x - \sigma)\tau_{yz}^2 - (\sigma_y - \sigma)\tau_{xy}^2 - (\sigma_z - \sigma)\tau_{zx}^2 \\ &= \sigma_x\sigma_y\sigma_z - \sigma\sigma_x\sigma_y - \sigma\sigma_y\sigma_z - \sigma\sigma_z\sigma_x + \sigma^2\sigma_x + \sigma^2\sigma_y + \sigma^2\sigma_z - \sigma^3 + \sigma\tau_{xy}^2 \\ & \quad + \sigma\tau_{yz}^2 + \sigma\tau_{zx}^2 - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} \\ &= -\sigma^3 + \{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\}\sigma^2 + \{-(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\}\sigma \\ & \quad + (\sigma_x\sigma_y\sigma_z - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx}) \\ &= -\sigma^3 + J_1\sigma^2 + J_2\sigma + J_3 \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

この方程式の 3 つの解が主応力であり、それを、式(3.2)に代入して得られる 3 つの面の法線方向が主応力方向となる。符号も含めて大きい順に最大主応力 σ_1 、中間主応力 σ_2 、最小主応力 σ_3 である。

ここで、

$$\begin{aligned} J_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ J_2 &= (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 \\ J_3 &= \sigma_x\sigma_y\sigma_z - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} \end{aligned} \quad (3.5)$$

である。式(3.4)の解である 3 つの主応力は座標系の取り方に寄らない値であるため、その方程式の係数である J_1, J_2, J_3 も座標系の取り方に寄らない値である。よって、各々を応力の 1 次、2 次、3 次の不変量と呼ぶ。

次に、主応力の偏差応力 σ' について考えて、

$$\sigma = \sigma' + \sigma_m = \sigma' + \frac{J_1}{3} \quad (3.6)$$

と表わす．ここで， σ_m は平均垂直応力である．式(3.6)を式(3.4)に代入すると，

$$\begin{aligned}
 -\sigma^3 + J_1\sigma^2 + J_2\sigma + J_3 &= -(\sigma' + \frac{J_1}{3})^3 + J_1(\sigma' + \frac{J_1}{3})^2 + J_2(\sigma' + \frac{J_1}{3}) + J_3 \\
 &= -\sigma'^3 + (\frac{J_1^2 + 3J_2}{3})\sigma' + (\frac{2J_1^3 + 9J_1J_2 + 27J_3}{27}) \\
 &= -\sigma'^3 + J_1'\sigma'^2 + J_2'\sigma' + J_3' \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

ここで， J_1' ， J_2' ， J_3' を各偏差応力の1次，2次，3次の不変量と呼び， $J_1' = 0$ である．また， J_2' は材料の塑性変形と密接な関係があり，重要なパラメータの一つである．

3.5 降伏条件

本節では，式(2.3)に示すような等方性を持った材料を用いるため，その降伏条件について記述する．等方性とは特性が特定の方向に依存しない性質のことである．等方性材料の応力状態は，次式のように表現できる．

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = C \tag{3.8}$$

また，主応力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ はどのように入れ替えても等方性材料であるため式(3.8)は成立する．しかし，これらの主応力は座標系によって変化してしまうため，座標系に寄らず，応力状態が決まればただ一つに決まる量の応力の不変量 J_1' ， J_2' ， J_3' を用いて，次のように書き直すことができる．

$$F(J_1, J_2, J_3) = C \tag{3.9}$$

塑性変形において，体積一定則により体積変化は生じないため，降伏条件に平均垂直応力の効果は寄与しない．よって次式のように偏差応力の不変量 J_2' ， J_3' を用いて表現すればよい．

$$F(J_2', J_3') = C \tag{3.10}$$

この式(3.10)を満足する降伏条件のうち，広く用いられているものがトレスカの降伏条件とミーゼスの降伏条件である．以下に，簡単のため図 3.1，図 3.2 のような薄肉中空管を基に

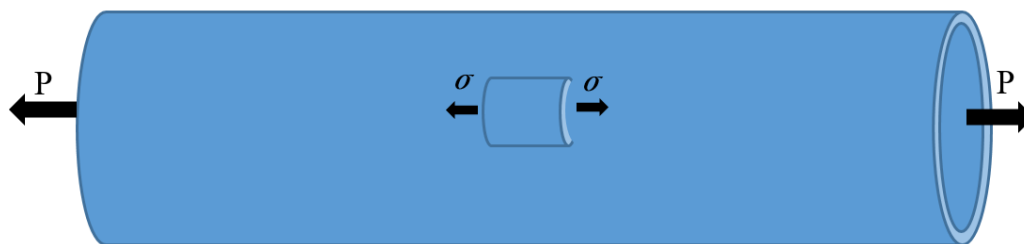


Fig.3.1 Uniaxial stress state

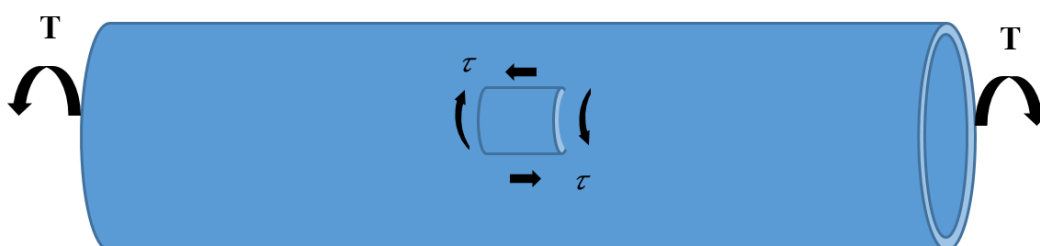


Fig.3.2 Simple shear state

降伏条件について考えていく．

3.5.1 トレスカの降伏条件

Henri Édouard Tresca は、材料に作用する最大のせん断応力値がある限界に達すると降伏するという考えを提案した．これを最大せん断応力説，トレスカの降伏条件と呼ぶ．この考えを以下に定式化していく．

トレスカの降伏条件を適応するためには主応力の大小を判断する必要がある．ここでは、仮に $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ であるとする．その条件下で最大せん断応力 τ_{max} を表わすと、

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (3.11)$$

となるため、トレスカの降伏条件は、

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = C' \quad (3.12)$$

である．ここで， C' は材料定数である．このトレスカの降伏条件をあらゆる応力状態でも適応可能にするため，まず単軸応力および単純せん断状態における降伏を表現できるように C' を定めていく．

図 3.1 の単軸応力状態の場合，最大主応力 σ_1 は単軸応力 σ であり， $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ である．単軸応力が降伏応力 Y となったときに降伏するため， C' は次式となる．

$$C' = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma - 0}{2} = \frac{\sigma}{2} = \frac{Y}{2} \quad (3.13)$$

図 3.2 の単軸せん断状態の場合，主応力は，

$$\sigma_1 = \tau, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\tau \quad (3.14)$$

となる．せん断応力 τ がせん断降伏応力 k となったときに降伏するため， C' は次式となる．

$$C' = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\tau - (-\tau)}{2} = \tau = k \quad (3.15)$$

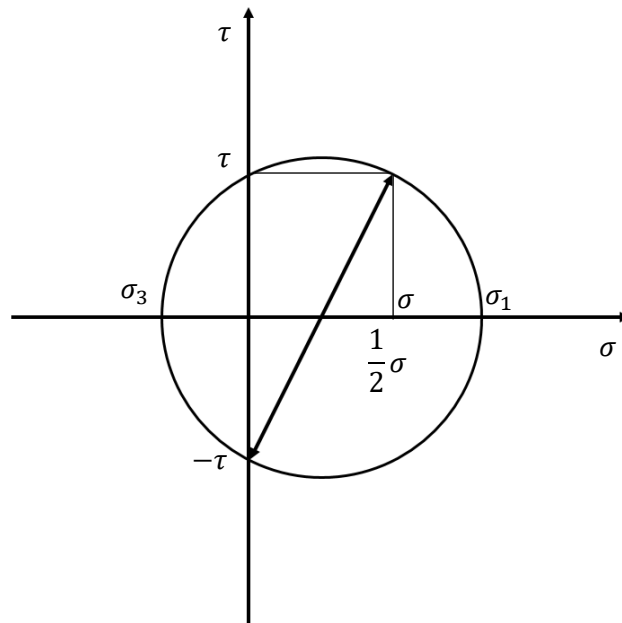


Fig.3.3 Mohr's stress circle for axial and shear stress

よって、式(3.13)と式(3.15)よりトレスカの降伏条件において重要な関係である次式が成立する。

$$Y = 2k \quad (3.16)$$

トレスカの降伏条件は、式(3.12)のように単純な形であるが、主応力間の大小を判断する必要があり、かつ中間の主応力 σ_2 の影響は考慮されない。

軸方向応力とせん断応力が同時に作用する場合、管の軸方向を x 軸、円周方向を y 軸、半径方向を z 軸とすると、 $\sigma_x = \sigma$, $\tau_{xy} = \tau$, $\sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ となり、モールの応力円は図 3.3 のようになる。このモールの応力円から主応力を求めると、

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\sigma + \sqrt{\left(\frac{\sigma-0}{2}\right)^2 + \left\{\frac{\tau-(-\tau)}{2}\right\}^2} = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2} \quad (3.17)$$

$$\sigma_2 = 0 \quad (3.18)$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2} \quad (3.19)$$

式(3.12)に式(3.17)と(3.19)を代入すると、

$$\begin{aligned} \sigma_1 - \sigma_3 &= \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2} - \left(\frac{\sigma}{2} - \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2} \right) \\ &= 2\sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2} \end{aligned} \quad (3.20)$$

よって、式(3.16)より、

$$\sigma^2 + 4\tau^2 = Y^2, \frac{\sigma^2}{4} + \tau^2 = k^3 \quad (3.21)$$

以上がトレスカの降伏条件となる。

3.5.2 ミーゼスの降伏条件

Richard von Mises が唱えた降伏条件は、応力のひずみエネルギー説を基に成り立ってい

る。Mises により提案された条件で、式(3.10)は次式で表わされる。

$$\begin{aligned}
 F(J_2', J_3') &= \frac{1}{6} \{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\} \\
 &= \frac{1}{2} \{\sigma_x'^2 + \sigma_y'^2 + \sigma_z'^2 + 2(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)\} \\
 &= \frac{1}{6} \{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)\} \\
 &= C''
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

ここで、 C'' は材料定数である。式(3.22)は式(3.10)で表わされる式のうち、もっとも単純な形である。ミーゼスの降伏条件式(3.22)では、偏差応力の不変量である J_2', J_3' によりせん断ひずみエネルギー U_s を、次式で表わすことができる。

$$U_s = \frac{1}{12G} \{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\} = \frac{J_2'}{2G} \tag{3.23}$$

このため、せん断ひずみエネルギーがある限界に達すると降伏が生じると解釈することができるため、せん断ひずみエネルギー説とも呼ばれている。

トレスカの降伏条件と同様に単軸応力状態と単純せん断状態の場合の C'' について考える。単軸応力状態の場合、式(3.13)と同様に、

$$C'' = J_2' = \frac{1}{6} \{(\sigma - 0)^2 + (0 - 0)^2 + (0 - \sigma)^2\} = \frac{1}{6} * 2\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{3} \tag{3.24}$$

単純せん断状態の場合、式(3.15)と同様に、

$$C'' = J_2' = \frac{1}{6} \{(\tau - 0)^2 + \{0 - (-\tau)\}^2 + (-\tau - \tau)^2\} = \frac{1}{6} * 6\tau^2 = \tau^2 \tag{3.25}$$

よって、式(3.24)と式(3.25)よりトレスカの降伏条件において重要な関係である、次式が成立する。

$$Y = \sqrt{3}k \tag{3.26}$$

ミーゼスの降伏条件は、主応力すべてを用いるが主応力間の大小を判断する必要がなく、か

つ式(3.22)に示したように必ずしも主応力を求める必要がない。軸方向応力とせん断応力が同時に作用する場合、管の軸方向を x 軸，円周方向を y 軸，半径方向を z 軸とすると， $\sigma_x = \sigma$ ， $\tau_{xy} = \tau$ ， $\sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ となり，式(3.22)より，

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6} \{ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \} \\ &= \frac{1}{6} \{ (\sigma - 0)^2 + (0 - 0)^2 + (0 - \sigma)^2 + 6(\tau^2 + 0 + 0) \} \\ &= \frac{1}{3} (\sigma^2 + \tau^2) \end{aligned} \quad (3.27)$$

よって，式(3.26)より次のようになる。

$$\sigma^2 + 3\tau^2 = Y^2, \quad \frac{1}{3} \sigma^2 + \tau^2 = k^2 \quad (3.28)$$

以上がミーゼスの降伏条件である。

3.6 弾塑性構成則

一般に金属材料では，弾性域を超える荷重を負荷すると，材料は降伏し塑性域に入る。塑性域を表現するのが降伏関数であり，今回はミーゼス(von Mises)降伏関数を用いる。降伏関数が塑性ポテンシャルと一致する時の流れ則を関連流れ則という。また，塑性ひずみ速度が降伏曲面に直交するため，直交則ともいう。ミーゼス降伏関数はせん断ひずみエネルギーがある限界値になったら破損する延性材料の降伏条件として広く使われている。

3.6.1 降伏関数

降伏関数は一般に応力の関数である。塑性変形時に応力は 0 であるため，降伏関数を f とするとき， $f(\sigma_{ij}) = 0$ を満たす曲面を降伏曲面と呼ぶ。降伏とはこの曲面上の応力状態を指す。降伏関数あるいは降伏曲面は塑性変形の進行に伴って膨張あるいは移動する。

3.6.2 加工硬化(Work hardening)

加工硬化とは，ひずみ硬化(Strain hardening)とも呼ばれ，金属に応力を与えると塑性変形

によって硬さが増す現象である。金属に応力を与えると結晶面に沿ってすべりが生じ、転位を生み出す。転位は順次に結晶格子内を移動していくが、加工硬化を起こし易い金属あるいは合金では、加工を繰り返すことで転位密度が増加していき、転位は解放されずに次第に蓄積し、そのすべり面に対しての抵抗が徐々に増してくる。すなわち、冷間加工により変形が進む程、転位は増加・重層化して外力に対する抵抗が大きくなり硬さを増していくことになる。

3.6.3 バウシンガー効果(Bauschinger effect)

バウシンガー効果は、一度ある方向に塑性変形を与えた後に、逆方向の荷重を加えると、再び同方向に荷重を加えたときよりも低い応力で塑性変形がおこる効果である。

3.7 硬化則

塑性流れの進行中に降伏条件がどのように変化するかを表わす。本研究では実際の金属の塑性挙動に近づけるため、複合硬化則を用いている。複合硬化則は、以下に示す等方硬化則と移動硬化則を組み合わせたものである。一般的によく用いられている硬化則であるこれらについて記述していく。

3.7.1 等方硬化則(Isotropic hardening rule)

降伏曲面が相当塑性ひずみの変化に従って原点を共有したまま等方的に膨張・収縮するものとする硬化を等方硬化則と呼ぶ。この中で塑性ひずみのする仕事は降伏曲面の膨張に費やされていると考えられている。図 3.4 からわかるように $\overline{OY} < \overline{BC}$ であるため、等方硬化則は加工硬化を表現できるが、バウシンガー効果を表現できない。

3.7.2 移動硬化則(Kinematic hardening rule)

降伏曲面が塑性変形の進行に伴ってその大きさを変えずに移動しているものとする硬化を移動硬化則と呼ぶ。ミーゼスの条件の場合、降伏曲面の半径は変化せず、中心が移動することを示す。図 3.5 からわかるように $\overline{OY} > \overline{BC}$ であるため、移動硬化則ではバウシンガー

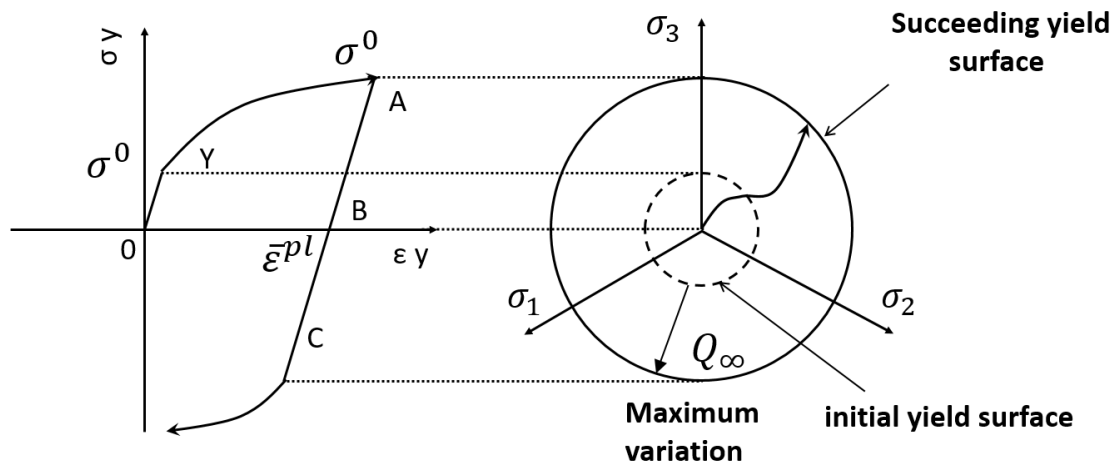


Fig.3.4 Isotropic hardening

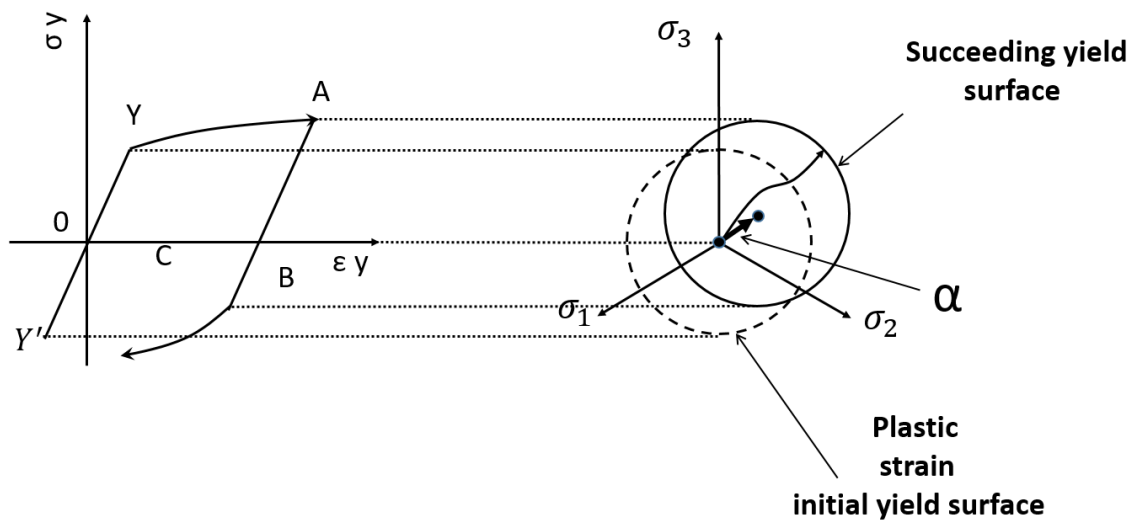


Fig.3.5 Kinematic hardening

効果を表現できるが、加工硬化を表現できない。

3.7.3 複合硬化則(Combined hardening rule)

一般の金属材料では上記の等方硬化則と移動硬化則が同時に起こっていると考えられる。複合硬化則は等方硬化と移動硬化を組み合わせた硬化則であり、バウシinger効果と加工硬化をともに表現できる。

本研究に用いる複合硬化則は、1990年に Lemaitre ら⁽⁸⁾によって提案されたモデルで、2つ

の数式により構成されている．まず一つ目に等方硬化則を表現する式として，次のように表わされる．

$$\sigma_y' = \sigma_{y0} + \Delta\sigma_y^s [1 - (-\beta \varepsilon^{-pl})] \quad (3.29)$$

ここで σ_y' は現時点における降伏応力， σ_{y0} は初期降伏応力， $\Delta\sigma_y^s$ は降伏曲面の最大変化量， β は材料パラメータである．ただし，

$$\Delta\sigma_y^s = \frac{\sigma^s - \sigma_{y0}}{2} \quad (3.30)$$

で表わされ， σ^s は定常状態まで広がった際の弾性域の大きさである．式(3.29)は，弾性域の広がりを相当ひずみ ε^{pl} の指数関数としたものである．続いて，移動硬化則を表現する式として，次のように表わされる．

$$\sigma = \alpha + C \int_{\sigma_y}^{\sigma} (\sigma - \alpha) d\sigma \quad (3.31)$$

ここで α は背応力(応力空間上の中心)， C は移動硬化則における硬化係数， σ は現応力， γ は材料パラメータである．3.8.5 項の表 3.1 に本研究で用いたパラメータを示している．

3.8 最大累積相当塑性ひずみ最小化問題への適応

本章で取り扱うモデルは，履歴型制震デバイスのせん断降伏型パネルダンパー(SPD)としているためそのモデルについて示す．せん断型パネルダンパーは低降伏点鋼を用いたパネル部と上下の固定板で構成される制震デバイスであり，制震性能を発揮する部分は基本的にパネル部のみであることからパネル部のみの設計を行う．

3.8.1 定式化

正規化された体積密度 ρ を設計変数とし，変形能力の指標である最大累積相当塑性ひずみ $CEPS_{max}$ (Maximum Cumulative Equivalent Plastic Strain)の最小化を目標とした．その定式化は，以下のようになる．

$$\text{minimize } CEPS_{\max} \quad (3.32)$$

$$\text{subject to } M = \int_{\Omega} \rho d\Omega \leq M, \rho_i^L \leq \rho_i \leq \rho_i^U \quad (3.33)$$

ここで、 M は体積の制約値である。

3.8.2 最大累積相当塑性ひずみ最小化問題

局所測度のミニマックス問題には最大測度の局所性により飛び移りの可能性があり、領域変動に対して微分不可能を生じることがあるため、式(3.32)の局所目的汎関数の感度関数を直接求めることは困難である。そこで、KS 関数を用いて、次のように滑らかで微分可能な積分汎関数へ変換する。

$$KS(\phi(x)) = \frac{1}{k} \ln \int_{\Omega} \exp\left(\frac{\phi(x)}{\phi_a} k\right) dx \quad (3.34)$$

$$\phi(x) = CEPS \quad (3.35)$$

ここで、 k は定数である。図 3.6 のように k が十分に大きな値をとるとき、関数 $\phi(x)$ の最大値を強調することができる。 $\phi(x) = 8(x-0.4)^2 + 2\exp(x^2) - 2\cos(15x)$ を用いて、 k に対する KS 関数の挙動を図 3.6 に示した。

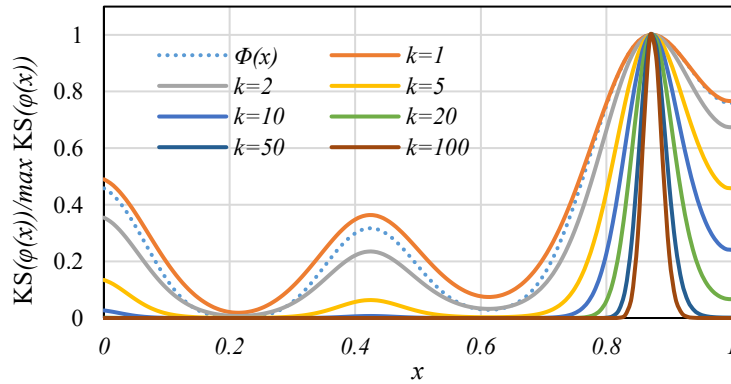


Fig.3.6 KS Function

3.8.3 密度法によるトポロジー最適化

3.8.1 項で定式化した最適化問題に対し，有限要素法による繰り返し弾塑性解析の結果を基に密度法によるトポロジー最適化を行った．密度法によるトポロジー解析では，各要素に仮想的な材料密度 ρ を 0 から 1 までの値として与えることで表現しており，均質化された弾性テンソル E^H を 0 から 1 の間で正規化された密度のみの関数として，

$$E^H = Ef(\rho) \quad (3.36)$$

と表わし，この式に密度が 0 のときに弾性テンソルが 0，密度が 1 のときに E となる条件を満足するように次式で表わす．

$$E^H = E\rho^p \quad (3.37)$$

ここで， p はペナルティーパラメータと呼ばれ，通常 3 から 4 の値を用いるのがよいとされている．また，弾性テンソルの変化に伴い，初期硬化係数 C ，移動硬化材料パラメータ γ ，降伏曲面変化速度 β ，初期降伏応力 σ_{y0} および定常状態まで広がった際の弾性域の大きさ σ^s も弾性テンソルと同様に，それぞれ次式を用い，各要素の材料密度分布と非線形挙動に関する材料パラメータを関連づけた．

$$C = C_0f(\rho) \quad (3.38)$$

$$\gamma = \gamma_0f(\rho) \quad (3.39)$$

$$\beta = \beta_0f(\rho) \quad (3.40)$$

$$\Delta\sigma^s = \Delta\sigma_0^sf(\rho) \quad (3.41)$$

$$\sigma_{y0} = \sigma_{y0_0}f(\rho) \quad (3.42)$$

3.8.4 トポロジー感度の導出

繰り返し弾塑性材料を対象とするトポロジー最適化問題において，感度解析によって感度関数を理論的に導出することは極めて困難である．このため，本研究の目的関数に対する

感度を前進差分法で算出する．式(3.32)の目的関数に対して，密度に対する導関数は次式のようにになる．

$$\frac{\partial \text{KS}(\phi(x))}{\partial \rho} = \frac{1}{k} \frac{\int_{\Omega} \left\{ \exp\left(\frac{\phi(x)}{\phi_a} k\right) \frac{k}{\phi_a} \frac{\partial \phi(x)}{\partial \rho} \right\} dx}{\int_{\Omega} \exp\left(\frac{\phi(x)}{\phi_a} k\right) dx} \quad (3.43)$$

式(3.43)中の $\partial \phi(x) / \partial \rho$ 部に前進差分の式を代入すると，

$$\frac{\partial \text{KS}(\phi(x))}{\partial \rho} = \frac{1}{k} \frac{\int_{\Omega} \left\{ \exp\left(\frac{\phi(x)}{\phi_a} k\right) \frac{k}{\phi_a} \frac{\phi(\rho + \Delta \rho) - \phi(\rho)}{\Delta \rho} \right\} dx}{\int_{\Omega} \exp\left(\frac{\phi(x)}{\phi_a} k\right) dx} \quad (3.44)$$

また，式(3.44)の全領域の感度関数を各々の要素感度に変換すると以下のようにになる．

$$\frac{\partial \text{KS}(\phi(x))}{\partial \rho} = \frac{\exp\left(\frac{\phi(x)}{\phi_a} k\right) \frac{1}{\phi_a} \frac{\phi(\rho + \Delta \rho) - \phi(\rho)}{\Delta \rho}}{\int_{\Omega} \exp\left(\frac{\phi(x)}{\phi_a} k\right) dx} \quad (3.45)$$

3.8.5 数値モデル

対象とするせん断型パネルダンパーの初期形状は，図 3.7 に示すように板厚を 12mm とし，パネル幅 D および正味の高さ H が板厚 t_w の 13 倍 ($D/t_w = 13$) の 156mm となる正方形を対象とした．従来の研究で用いられている低降伏点鋼を用いたせん断ダンパーの幅厚

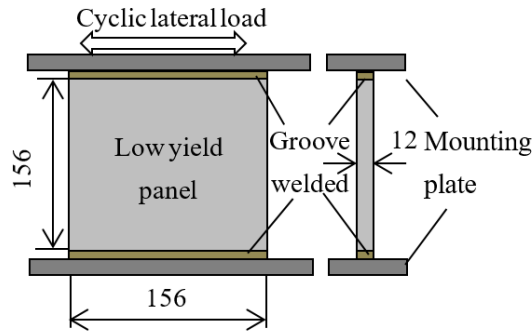


Fig.3.7 Initial SPD model

比 D/t_w は 30 から 50 程度がほとんどであり，今回の試験体の $D/t_w = 13$ はそれらに比べてかなり小さいことがわかる．これは従来の研究で用いられている試験体では，側面に縦リブを設けているため，幅厚比を大きくしても座屈の発生を遅らせ，かつリブが斜引張力のアンカ一の役割を果たす．一方，本計算例ではリブ無しのパネル単体を用いることを試みているためである．なお，周辺が補剛されたせん断パネルの塑性座屈式(3.46)が無次元幅厚比 0.26 以上の場合は実験的に求められている⁽⁹⁾．これによると，本試験体周辺にリブをつけた場合のせん断座屈応力比 τ_{cr}/τ_y は，適用範囲を超える非常に大きなものとなる．式(3.47)で示される一般化幅厚比⁽⁹⁾ \bar{D}/t_w は 0.256 となる．ただし，計算に用いたヤング係数 E には公称値 $206 \times 10^3 \text{N/mm}^2$ を用いた．

$$\frac{\tau_{cr}}{\tau_y} = \frac{1.02}{\frac{\bar{D}}{t_w} - 0.26} + 0.6 \quad (3.46)$$

$$\frac{\bar{D}}{t_w} = \frac{D}{t_w} \sqrt{\sigma_y/E} \quad (3.47)$$

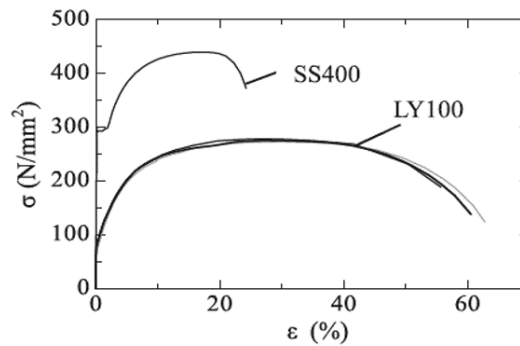


Fig.3.8 Nominal stress-strain curves for SS400 and LY100 tension coupons by Liu et al⁽⁴⁾

Table3.1 Material property for composite hardening rule

Elasticity	Young's modulus E	200GPa
	Poisson's ratio ν	0.306
Metal plasticity	Initial yield stress σ_{y0}	30MPa
	Initial kinematic hardening modulus C	2.45GPa
	Kinematic hardening material parameter γ	339
Repeated curing	Maximum change of yield surface $\Delta\sigma_y^s$	180GPa
	Yield surface change rate β	3

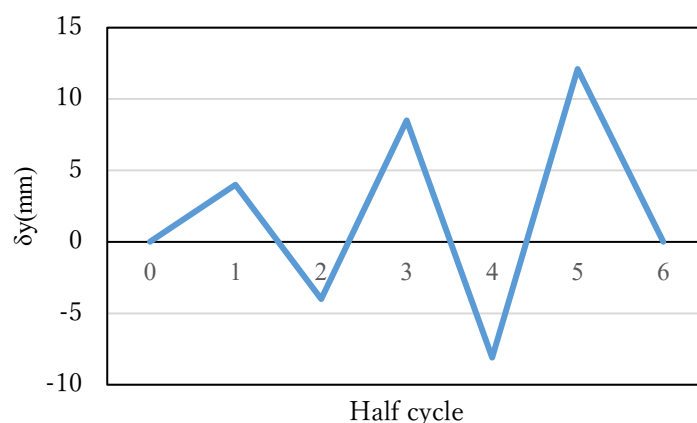


Fig.3.9 Forced displacement Loading history

3.8.6 材料特性

図 3.8 は極低降伏点鋼(LY100)の引張試験を行うことによって得られる公称応力-ひずみ曲線である．LY100 の 0.2%耐力は 80.1N/mm^2 で，伸びは約 60%に達する．このような材料特性を有する極低降伏点鋼を材料としている．また，弾塑性構成則として複合硬化則を用いて解析を行う．3.7.3 項で述べた式(3.29)-(3.31)に用いたパラメータと材料の特性値を表 3.1 に示す．

3.8.7 境界条件

境界条件として下部を完全固定し，上部には降伏変位(δy)を正負整数倍する変位を図 3.9 に示すように 1 往復ずつ正負整数倍に漸増して与えることで地震荷重を模擬する．

3.8.8 初期形状の解析結果

初期形状における最大累積相当塑性ひずみ *CEPS*(Cumulative Equivalent Plastic Strain)の分布を図 3.10 に示すが，隅角部にひずみが集中していることがわかる．次に，数値解析の結果得られた各要素の応力とひずみを基にエネルギー吸収量 *EA* を求める．エネルギー吸収量については，Liu ら⁷⁾のこれまでの研究において，図 3.11 および 3.12 に示すように，解析により計算した解析値と実験値の履歴ループは精度よく一致し，最終的な累積エネルギー吸収量は数値解析の有効性が確認されているため，今回は数値解析のみを行う．また，図 3.13

は劉ら⁽⁴⁾の実験結果であり，図 3.10 でひずみの集中が見られた隅角部にクラックが起きていることがわかる．解析結果の履歴ループを図 3.14 に示す．エネルギー吸収量は上部節点の反力と変位量の積であり，図 3.14 に示されている履歴ループの面積を求めることで導き出される．

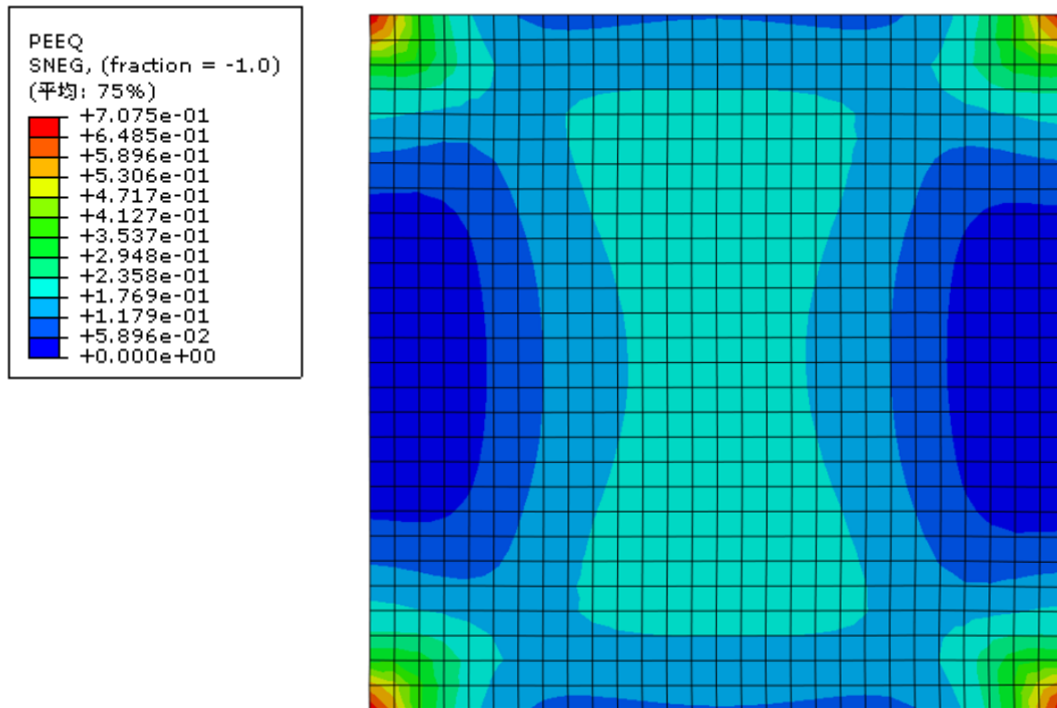


Fig.3.10 CEPS distribution of initial SPD

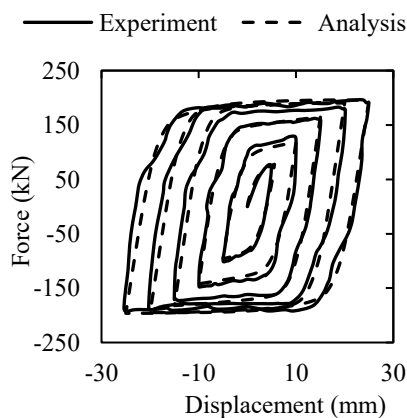


Fig.3.11 Hysteretic load-displacement curves by Liu and Shimoda⁽⁷⁾

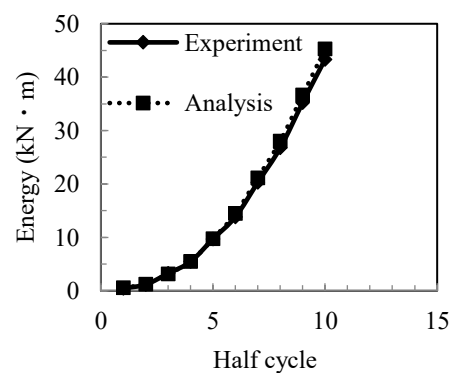


Fig.3.12 Cumulative absorbing energy comparison by Liu and Shimoda⁽⁷⁾

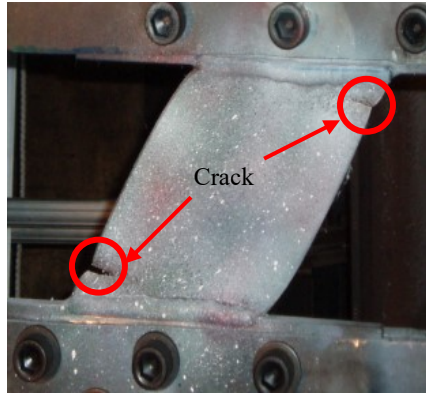


Fig.3.13 Deformed quadratic SPD by Liu et al.⁽⁴⁾

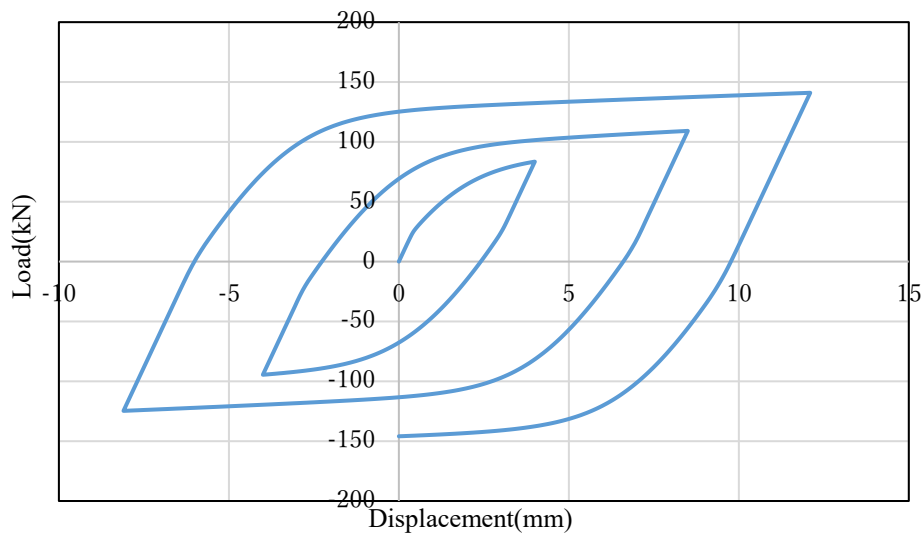


Fig.3.14 Hysteretic load-displacement curves

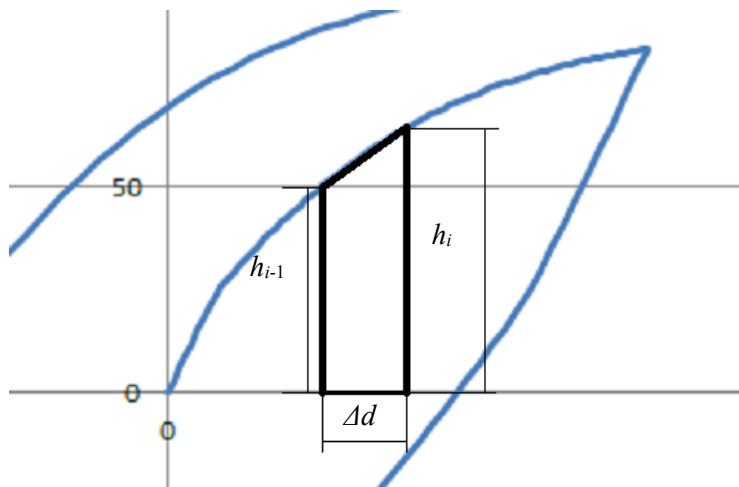


Fig.3.15 Reference chart for absorbing energy calculation

履歴ループの面積は図 3.15 に示されている変数から，次式により求められる．

$$EA = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta d(h_i + h_{i-1})}{2} \quad (3.48)$$

解析の結果，最大累積相当塑性ひずみとエネルギー吸収量はそれぞれ $CEPS_{\max}=0.7075$ ， $EA_0=5.80\text{kJ}$ となった．

3.8.9 数値解析結果

本項では，せん断型パネルダンパーに対する最大累積相当塑性ひずみ最小化問題とし，密度法を用いて最適形状を導出した．体積制約値を初期形状の 90%から 50%まで 10%刻みで減らしながら最適化計算を行った．図 3.16 に最適化計算で得られた最適形状とその形状に

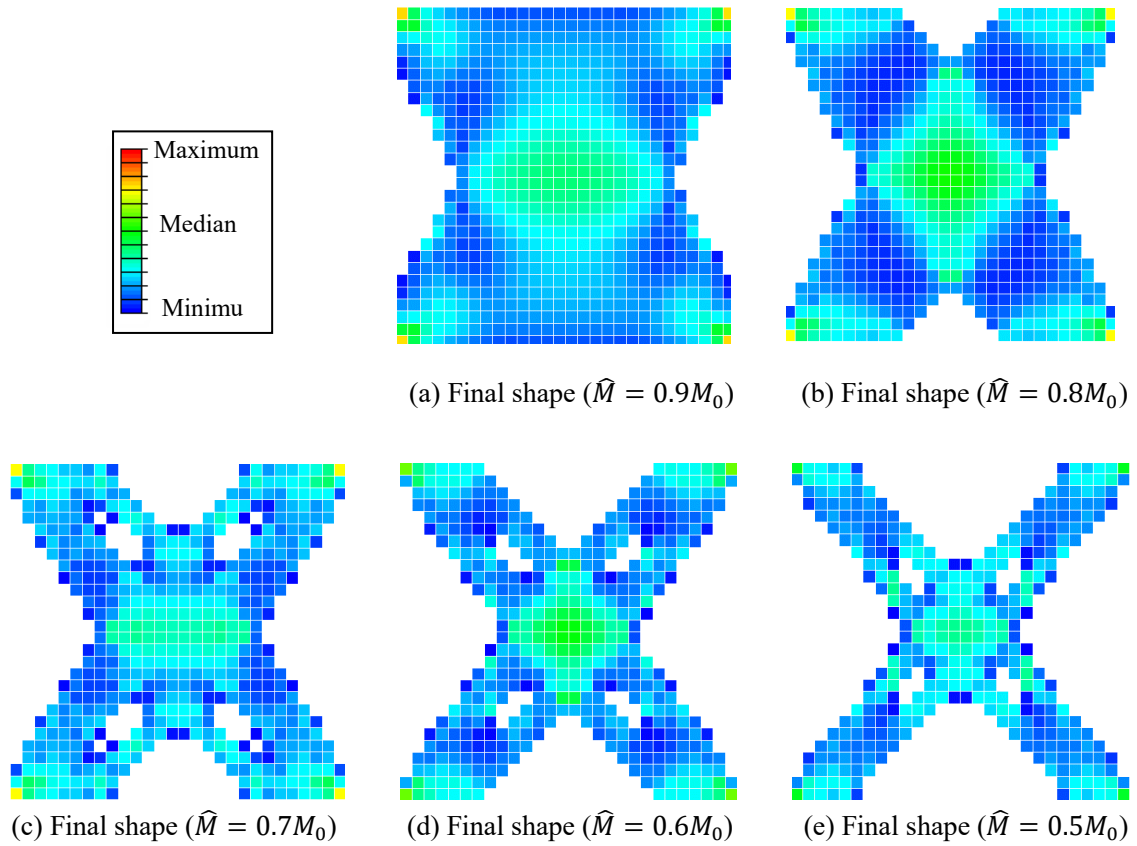


Fig.3.16 Optimal shape of each constraint value and cumulative equivalent plastic strain distribution at that time. The contour conforms to the initial shape

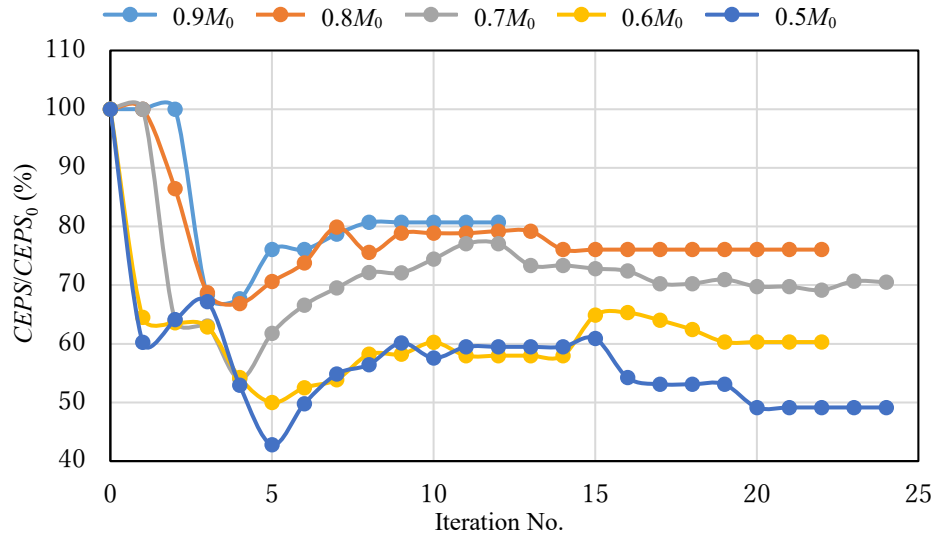


Fig.3.17 Optimization history for each constraint value

おける累積相当塑性ひずみの分布を示す．ここに示すコンターは初期形状に準じている．また，図 3.17 には各計算例における最大累積相当塑性ひずみ $CEPS_{\max}$ を初期形状の値で無次元化した履歴グラフである．

図 3.16(a)は体積制約値を $0.9M_0$ にしたときの最適形状およびその際の累積相当塑性ひずみの分布図であり，側部が削られた形状となった．図 3.17 において，最適化計算回数が 4, 5 回程度と少ない段階で最大累積相当塑性ひずみの最小値を示しているが，原因として，本研究における最適化問題の目的関数である最大測度は累積相当塑性ひずみのような局所的な値であるため，最大値の飛び移り現象が発生することがある．その緩和対策として，KS 関数を用いて滑らかで微分可能な積分汎関数へ変換したが，その現象を完全に防ぐことができず，計算の初期段階において収束履歴曲線が波打つような現象が現れたと考えられる．体積制約値が $0.8M_0$ では，図 3.16(b)のように，側部に加え上下部も削られ X 字形状となった．図 3.17 において，体積制約値が $0.9M_0$ のときと同じく最適化初期段階で最大累積相当塑性ひずみの最小値が見られるが，上記と同じ理由で考慮していない．体積制約値が $0.7M_0$ 以下のときも同様である．体積制約値を $0.7M_0$ 以下にした場合は X 字状に削れるのに加え，孔が生成されることが確認できるが，孔が開く位相変化の際に一旦最大累積相当塑性ひず

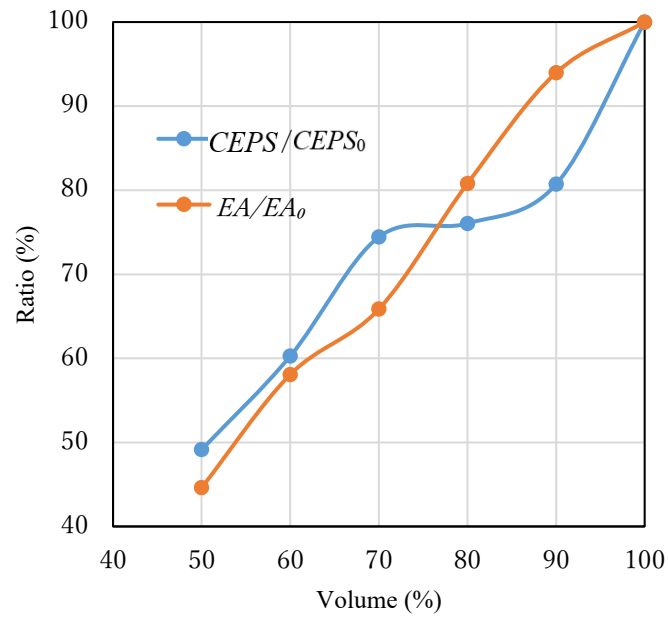


Fig.3.18 *CEPS* and *EA* ratio VS. Volume in the optimization results.

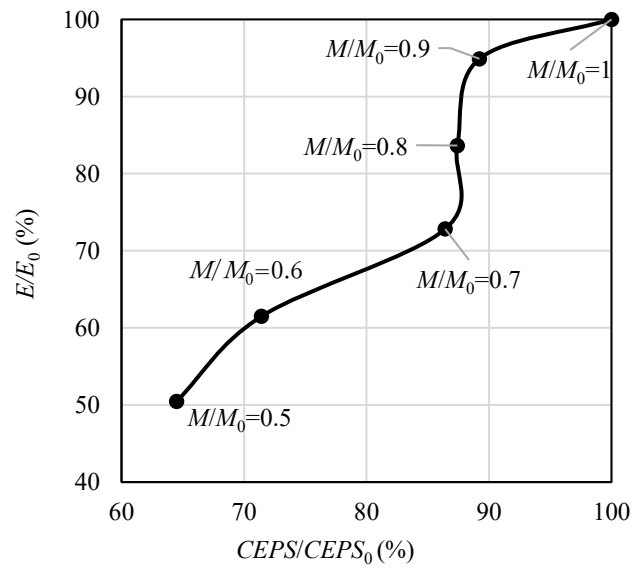


Fig.3.19 Correlation between *CEPS* and *EA*

みの大幅な上昇がみられた。これは、密度法によるトポロジー最適化では外形部の要素より累積相当塑性ひずみの値が内部の要素の方が低い場合には孔が生成されるが、孔が生成された際に孔周辺に累積相当塑性ひずみの集中が発生したためであると考えられる。しかし、

最終形状でも孔が空いたモデルが創出されることから、繰り返し計算の結果孔の周辺のひずみの集中が、他の部位より突出することがない孔の形状が創出され、また、一定以下の体積制約では孔の必要性が認められる。なお、孔の位置に関しては制約値の減少に伴ってより中央付近に空く傾向が認められる。

図 3.18 は各体積制約値の最大累積相当塑性ひずみとエネルギー吸収量をそれぞれ初期形状の値(0.7075, 5.80kJ)で無次元化したグラフである。体積減少に伴いエネルギー吸収量および最大累積相当塑性ひずみの減少傾向が確認できる。また、体積減少率に対する最大累積相当塑性ひずみの減少率とエネルギー吸収量の減少率は 77%付近で逆転している。図 3.18 より、本研究の検証範囲において体積の減少率とエネルギー吸収量の減少率はおおよそ比例している。これに対し、初期形状と比べた際の最大累積相当塑性ひずみの減少率は体積約 75%以上では体積減少量に比べて大きくなるが、体積約 75%以下になると小さくなっている。このため、ダンパーの設置場所に余裕がある場合はより変形能力が大きくて、体積を十分に減らした際の形状を使用する方が同量の低降伏点鋼パネルでの許容できる地震強度は大きくなると予想できる。ただし、繰り返し強制変位が一定であるため、ダンパーの反力とエネルギー吸収量は比例関係となり、体積とエネルギー吸収量もおおよそ比例関係であることから、体積の減少に伴いエネルギー吸収量および反力も小さくなる。

図 3.19 は図 3.18 で示した最大累積相当塑性ひずみとエネルギー吸収量をそれぞれの軸にした際のグラフである。エネルギー吸収量の減少に対する最大累積相当塑性ひずみの減少効果は 87%付近で逆転している。図 3.19 より、最大累積相当塑性ひずみの減少率がエネルギー吸収量の減少率に対して小さいのは体積 90%付近までであり、90%から 70%にかけて最大累積相当塑性ひずみはほとんど変わらずにエネルギー吸収量だけが大きく減少していることがわかる。これらの結果から、最大累積相当塑性ひずみとエネルギー吸収量はトレードオフの関係であり、体積とエネルギー吸収量の関係はほぼ比例関係であることから、設置場所のスペースに余裕がある場合は削り量を大きくして変形能力を向上させ、せん断型パネルダンパーの厚みや枚数を増やすことによってエネルギー吸収量を増やせばよいと考えられる。逆に設置場所に余裕がない場合は、エネルギー吸収量確保のため削り量を 10%か

ら 20%程度に抑える方がよいと考えられる。

3.8.10 形状の評価

図 3.16 に体積制約の下，最大累積相当塑性ひずみ最小化を目的としたトポロジー最適化を行って得られた形状を示したが，要素依存性があるため形状が滑らかではない．トポロジー最適化の欠点として，最適形状が要素依存性を持つため，正確な形状を出すのは非常に困難である．形状をより正確に表すことが可能な構造最適化手法として形状最適化があるが，繰り返し弾塑性問題において負荷経路依存性がありながら，荷重除荷点における応力とひずみの関係が微分不可能な状況であるため，形状感度を理論的な導出を必要とする分布系パラメータフリー形状最適化⁽¹⁰⁾は極めて難しい．そのため本項では，次章で行うパラメトリック手法によるせん断型パネルダンパーの形状最適化の参考として形状の傾向にのみ着目する．体積制約値が大きい内は，特に左右中央部の要素が不要と判断され，次点で上下中央部の要素が不要と判断される傾向があることがわかる．また，孔が空く場合，中心から見て角の方向に細長く空く傾向が見られる．以降を踏まえ，次章から滑らかな外形形状を持つ最適形状の創出を行う．

参考文献

- (1) 泉満，可児長英他，極低降伏点鋼を用いたせん断降伏型制震部材の低サイクル疲労実験（その 1，その 2），日本建築学会学術講演梗概集，(1992)，pp.1333-1334.
- (2) 竹中啓之，国末晃寛他，低降伏応力度鋼板を用いた K 型ブレース制震装置に関する研究，日本建築学会学術講演梗概集，(1992)，pp.1339-1340.
- (3) Nakashima, M., Iwai, S. Iwata. M., Takeuchi, T., Konomi, S., Akazawa, T., Saburi, K., Energy dissipation behaviour of shear panels made of low yield steel, International Association for Earthquake Engineering, Earthquake Engineering Structural Dynamics, Vol.23, No.12(1994), pp.1299-1313.
- (4) 劉陽，青木徹彦，高久達将，福本喆士，低降伏点鋼せん断パネルダンパーの繰り返し載荷

実験, 土木学会構造工学論文集, Vol.53A(2007), pp.560-567.

- (5) 小池洋平, 谷中聡久, 宇佐美勉, 葛漢彬, 尾下里治, 佐合大, 鵜野禎史, 高機能補剛せん断パネル型ダンパーの開発に関する実験的研究, 土木学会構造工学論文集, Vol.54A(2008), pp.372-381.
- (6) 葛漢彬, 金子恵介, 宇佐美勉, 高機能補剛せん断パネルダンパーの繰り返し弾塑性挙動と復元力モデルに関する研究, 土木学会構造工学論文集, Vol.56A(2010), pp.522-532.
- (7) Liu, Y., and Shimoda, M., Shape optimization of shear panel damper for improving the deformation ability under cyclic loading, Structural and Multidisciplinary Optimization, Vol.48, No.2(2013), pp.427-435.
- (8) Lemaitre, J. and Chaboche, J. L., Mechanics of Solid Materials, (1990).
- (9) 高橋泰彦, 品部佑児, せん断降伏型薄鋼板の復元力特性に関する実験的研究, 日本建築学会構造系論文集, Vol.494(1997), pp.107-114.

第4章 パラメトリック手法によるせん断型パネルダンパーの形状最適化

4.1 はじめに

前章のトポロジー最適化の結果は要素依存性を持ち、密度法によるトポロジー最適化の特性上、機械的特性が不明瞭である部分が存在する。そこで、本章ではトポロジー最適化の結果に基づく詳細設計が必要であるため、形状最適化を行う。

4.2 パラメトリック法

本章では、形状最適化を行うにあたりパラメトリックな手法である実験計画法を利用した応答曲面法を使用する。材料非線形を考慮した繰り返し弾塑性解析を用いた弾塑性構造最適化問題では、形状最適化計算を行うにあたり、設計変数空間における目的関数は極小点(Local minima)を数多く有するが、その属する局所的超凹曲面の境界は勾配が不連続となることが多い。その理由として、設計変更に伴い構造の一部が弾性から塑性あるいは塑性から弾性に変化するため、目的関数が構造応答を含んで定義される場合、目的関数も勾配が不連続となるためである。このような特徴を有する弾塑性問題の構造最適化を行うに当たっては、勾配法を用いると初期値(初期設計)の属する局所的超凹曲面から脱出することは困難であり、結局は初期値の属する超凹曲面の極小値に解は収束することになってしまう。弾性問題においては、構造解析と設計最適化を交互に繰り返し行う、Nested approach と呼ばれることが多い従来の手法に対して、計算効率を向上させる目的から、同時最適化(Integrated approach)手法としての応用が行われてきた。しかし、上述のように局所解脱出の観点から弾塑性問題に対して適用する試みはほとんどなされて来なかった。以上の理由より、全自動の形状最適化ではなく、手作業による応答曲面法を用いて形状最適化を行った。

工学における設計問題では、1回の評価には比較的多くの時間やそれに伴う何らかのコストがかかる。そのため、評価点(実験回数)は可能な限り少なくする必要がある。最適設計問題では、一つの設計変数ベクトル(すなわち形状などの評価点)に対し、その目的関数の値を計算すること(すなわち評価)は、1回の実験あるいはシミュレーションを行うことと同義で

ある．そこで，効率的な最適設計を行うために実験計画法や応答曲面法と呼ばれる手法が頻繁に用いられている．実験計画法は，統計的理論に基づき，適切かつ最小個数の実験(評価)点を決定する手法の総称である．一方，応答曲面法は，有限個の評価点およびそれらの評価値から，それらの関係を応答曲面として関数近似する手法である．実験あるいはシミュレーションの結果に基づき定義される目的関数は，当然ブラックボックスな関数であり，このような目的関数の代わりとして応答曲面を用いることで，最小限の評価で実用的な最適解を得ようとするのが，応答曲面法および実験計画法を用いた最適化手法である．なお，このような手法は，基本的に設計変数が実数値ベクトルであるパラメトリック最適化問題に対し適用可能な方法である．

4.3 応答曲面法

実験で得られたデータの解析方法として，まず実験データについて分散分析を行い，効果を確認し，実験で取り上げた水準の中で最適条件を解析する方法がある．本研究に用いた応答曲面法(RSM : Response Surface Methodology)は，実験により得られた離散的なデータを連続的な曲面へ近似する方法で，得られた応答曲面を目的関数の代替として用いることにより，大域的探索や計算コストの低減，目的関数の特性を可視化するとともに，目的関数への影響が強い重要な設計変数の見極めなどを行うことが可能となる手法である．応答曲面とは，一つの応答 y と n 個の説明変数 x の関係式を近似したものである．一般に，

$$y = f(x_1, x_2, x_3, \dots) + \varepsilon \quad (4.1)$$

というモデル式として表される．ここで， ε は誤差である．また，応答曲面法において関数形に制限はない．応答曲面モデルは要因と応答の因果関係を正確にモデル化したものではなく，迅速性と単純性が要求される実用面を考慮し，通常因果関係を単純な関数で表す．具体的には最小二乗法が適用可能な線形多項式であり，特に停留点を持つ中で最も単純な2次多項式が最適値探索の関数としてよく用いられる．以下に応答曲面法を用いるのに必要な用語について記述する．

4.4 実験計画法

実験計画法(DE : Design of Experiments)とは、特性値に対する要因の影響を効率よく解析する統計手法の総称である。信頼性のある実験データは実験回数を多くすることで得られるが、時間や資源には限りがあるため、少ない実験回数から信頼のできるデータが得られるような効率のよい実験計画が必要である。研究や開発、工程管理、品質管理から化学製品の性能や薬の薬効の評価など様々な分野で用いられている。実験計画法は実験の計画の方法と、得たデータの解析方法との2段階で構成されている。計画に用いる手法については本節で、データの解説を含めた全体の流れは次節で述べる。

4.4.1 基礎概念

ある製品の評価関数を y 、それに対する設計変数(要因)を x とする。製品開発では、 y の値(特性値)を目標として x を設定する。 y が x の関数であると考えた場合、これらの因果関係を $y=f(x)$ といったモデルに近似することができれば、膨大な回数の実験を行うことなく適した x の値を見つけることができる。実験計画法は、この x と y の因果関係をできるだけ少ない回数の実験から導き出すためにシステム化されたものである。本研究では、 $y=f(x)$ のモデルを推定式と呼んでいる。

4.4.2 因子

多くある評価関数に影響を及ぼす要因の中から、実験のために意識的に取り上げたものを因子(Factor)と呼ぶ。1種類の因子についてのみ調べる実験を1因子実験と呼ぶ。しかし一般にはその他にも大きな影響を及ぼす可能性のある因子が存在する。また、複数の因子が独立ではなく複数の因子の変化によるある条件が重なりによって特異な結果が得られる可能性もある。これを因子間の交互作用(相互作用)という。それに対し各因子による直接的効果を主効果と呼ぶ。

4.4.3 水準

各因子に設定する段階のことを水準(Level)という。要因を質的に分類、あるいは量的に変化させた条件のことである。たとえば品種を 1 から 3 の 3 品種としたり、今回のように寸法を短、中、長としたりする。実験計画法においては、連続変数の場合においても無限の組み合わせを考えることが実用的でないことから水準という離散化された変数で考える。水準を用いて変数を離散化することは、離散化によってノイズが強くなるという利点も有している。また、定量的でない変数も水準化することで擬似的に定量化可能である。

4.4.4 無作為化

無作為化(Randomization, ランダム化)とは、ある一群の要素から複数のグループを作る際に恣意的な判断やいかなる基準をも用いずにグループの要素を選び出すこと、またはその方法である。新たに作られた複数のグループ間に差異が無いものとし、全てのグループが同じであると見做すことが目的となる。要するに、ランダム化の目的はグループ間の違いを無視できるようにすることにある。

4.4.5 要因配置実験

主効果だけでなく交互作用について考慮したい場合、複数の因子を同時に取り上げた実験をする。要因配置実験は全ての因子と各因子の条件の違い(水準)を組み合わせで行う基本的な実験方法である。因子が 3 つで各因子の水準が 2 つである場合、 $2^3=8$ 通りの実験を行うことになる。ただし、因子が増えると実験数は膨大になってしまう。例として、水準が 2 つで因子が 10 であった場合は $2^{10}=1024$ 通りにもなってしまふ。この問題を解決する方法として、直交表を用いた実験(直交表実験)がある。

4.4.6 直交表

直交表(直交配列表)とは、表中のどの 2 列をとっても同じ数が同じだけある(直交関係がある)表のことである。前項で述べた 8 通りの実験は表 4.1 のように示される。ただし、交互作用を無視出来る場合、8 通りのうち 4 通りを行うだけで十分な結果を得ることができ

Table4.1 Example of orthogonal table

	要因 A	要因 B	要因 C
実験 1	1	1	1
実験 2	1	1	2
実験 3	1	2	1
実験 4	1	2	2
実験 5	2	1	1
実験 6	2	1	2
実験 7	2	2	1
実験 8	2	2	2

る。これには、ラテン方格を用いる。

4.4.7 ラテン方格

n 行 n 列の正方形の表に n 個の異なる記号が各行及び各列に一回だけ現れるように配置し

Table4.2 Sample of Latin square

A	B
B	A

A	B	C	D
B	C	D	A
C	D	A	B
D	A	B	C

Table4.3 Optimal orthogonal table

	要因 A	要因 B	要因 C
実験 1	1	1	1
実験 2	1	2	2
実験 3	2	1	2
実験 4	2	2	1

たものである。ラテン方式の名は Leonhard Euler がラテン文字(ローマ文字)を記号として用いたことによる。ラテン方格の見本を表 4.2 に示す。ラテン方格の中で第一行及び第一列が自然な順序で並んでいるものを標準形と呼ぶ。上記の 2 例はいずれも標準形である。またどのようなラテン方格も行または列を交換することで標準形にすることができる。2 次元のラテン方格を n 次元に拡張した物をラテン超方格(Latin hypercube)という。これに基づく実験計画法をラテン超方格法(LHS : Latin Hypercube Sampling)という。これを利用し、前項の実験は表 4.3 のように割り付けることができ、実験数を削減できる。

4.4.8 分散分析

分散分析は実験データを誤差の部分と本質的な部分にわけ、因子の効果を調べる方法である。応答曲面法においては推定式の作成に使われる。分散とは、各データと全体の平均値とのずれ(誤差)を合計したもの(ばらつき, Error)である。A,B,C という 3 つのデータ群があった場合、「それぞれの群の平均と A,B,C 全体の平均(母平均)とのずれ」と「それぞれの群の平均と個々のデータとのずれ」の 2 つについて調べる。前者は A,B,C の効果によって平均値とのずれが発生したとわかり、それぞれの効果の程度がわかる。後者はそれぞれの個人差であり、これを誤差としている。

4.5 応答曲面法の流れ

応答曲面法では、最適値を探索する過程が大きく 3 つのステップに分かれる。

第 1 ステップは実験データの収集である。応答曲面モデル(推定式)を構築するためのデータを効率的に収集するため、主に先で述べた実験計画法を用いる。参考までに、一次モデルでは要因配置計画、二次モデルでは、完全に最適化された実験計画法は存在しないが、中心複合計画⁽²³⁾⁽²⁴⁾、Box-Behnken⁽²³⁾⁽²⁵⁾計画などの手法が応答曲面計画として用いられる。これらの方法は 3 水準以上の完全実施要因計画よりも実験回数が少ないが、応答曲面モデルを構築するのに十分な実験点を得ることができるため、応答曲面法に多用される。

2 番目のステップは数式化(モデル化)である。応答曲面法で最もよく用いられる関数は、

説明変数同士の交互作用を含んだ 2 次多項式である。数式の構造が単純であり、かつ分散分析などの統計手法が適用可能であることがその理由として挙げられる。例えば、因子が 2 つの二次モデルは次のようになる。

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{11} x_1^2 + \beta_{22} x_2^2 + \beta_{12} x_1 x_2 \quad (4.2)$$

この二次モデルは 1 次項+2 次項+交互作用項で構成されており、一般に次のように表される。

$$Y = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i x_i + \sum_{i=1}^k \beta_i x_i^2 + \sum_{i < j=2}^k \sum_{j=2}^k \beta_{ij} x_i x_j \quad (4.3)$$

最後のステップは応答曲面モデルを用いた最適値の探索である。応答曲面モデルが 2 次多項式のような単純な関数の場合は容易に最適値探索が可能である。得られた応答曲面モデルから目的関数と制約条件を設定することで、最適化問題を定式化し最適値を探索する。応答が 2 つ以上の場合は、それぞれの応答曲面モデルを構築し、汎距離関数(Regret function)⁽²⁶⁾や満足度関数(Desirability function)⁽²⁷⁾⁽²⁸⁾といった数理的最適化手法を適用して、多目的最適化(Multi-response optimization)⁽²⁹⁾⁻⁽³²⁾も可能である。この手法は複数の応答を最適化する必要がある場合に便利である。多項式によって構成される応答曲面は、観測値を原則通過しないことが特徴である。したがって、この多項式モデルは、観測値に誤差などの不確実要素が含まれるデータに対して、観測値全体の傾向を把握したい場合などに有効である。図 4.1 に本研究で用いた応答曲面法による形状最適化のフローチャートを示す。また、フローチャートにおいて、色付きの枠の部分は手作業によることを示している。

4.6 応答曲面法の利点

応答曲面法は次のような利点がある。

- ・ 応答曲面法では、連続的な一次モデルや二次モデルに当てはめることで任意の水準を最適条件の候補にできるため、より詳細な最適条件を得られる。
- ・ 因子と特性の関係が等高線図で表現され、曲面の形状から最適条件の位置を直観的に認識できるため、因子と特性の関係がわかりやすい。二次モデルの等高線図の例を図

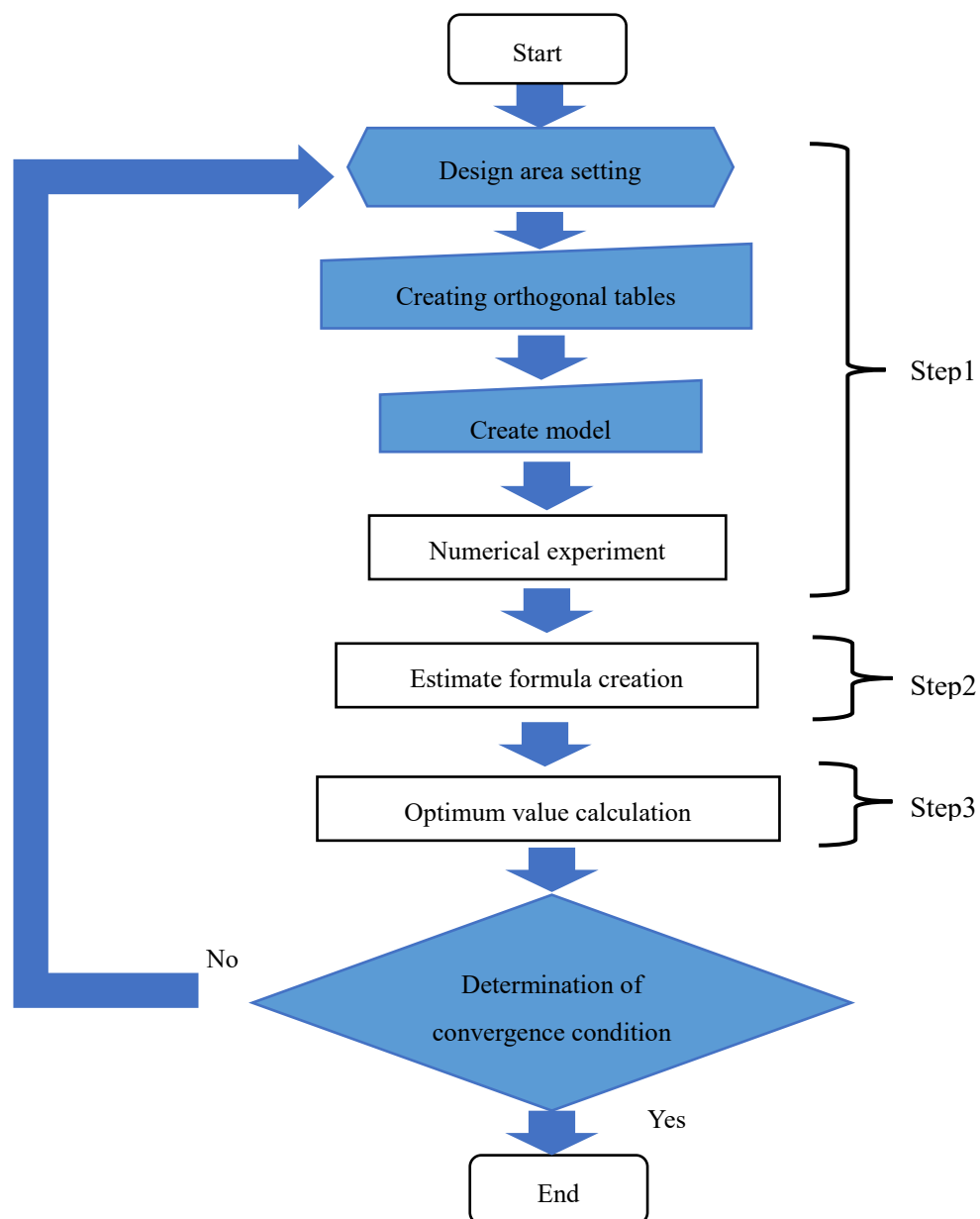


Fig.4.1 Flowchart of the optimization method

4.2 に示す.

- 応答曲面という非常に簡素な関数のみを用いて表現するため，最適値を簡単に計算することが可能となるため，計算回数が減り，最適化計算が早くなる.

4.7 代表的なパラメトリック曲線

平面上の複数の点(点列)をある順番で通るように定義された滑らかな曲線を自由曲線と

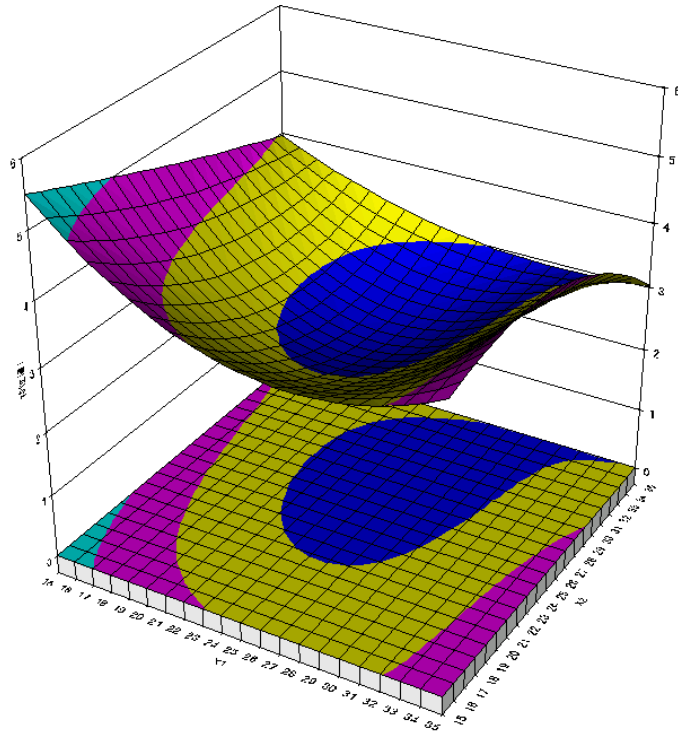


Fig.4.2 Sample of response surface

呼ぶ。これらの点列を通る滑らかな曲線は無数に存在するため、点列の位置だけでは自由曲線の形状を決めることはできない。点と点の間をどのような曲線(セグメント)でつなぐかを定義した曲線をパラメトリック曲線と呼び、このような形状の定義に用いられる点は、制御点(Control point)と呼ばれる。自由曲線という名称は、この制御点の位置を変えることで自由に形状を変形できることに由来する。また、このような制御点により直感的に曲線が作成可能なこと、さらには一つの曲線を数個の制御点座標のみでデータ化できることから、自由曲線はコンピュータにおけるCADソフトウェアやグラフィックソフトウェアによく用いられる。

4.7.1 ベジエ曲線

自由曲線のなかで最も基本的なものの一つに、ベジエ曲線(Bézier curve ,ベジエ曲線)がある。制御点を B_0, B_1, \dots, B_{n-1} とすると、ベジエ曲線は数学的には次式として定義される。

$$S_{bezier}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} p_i B_i J_{n-1,i}(t) \quad (4.4)$$

$$J_{n-1,i}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-1} \quad (4.5)$$

ここで、 $J_{n,i}(t)$ はバーンスタイン基底関数(Bernstein basis polynomials)である。また、 n はベジエ曲線の次数であり、次数 n のベジエ曲線を n 次ベジエ曲線という。 t が 0 から 1 まで変化するとき、制御点 B_0 と B_{n-1} を端点とするベジエ曲線が得られる。一般的に端点以外の制御点を通らない。

例として 2 次のベジエ曲線の作図法について、図 4.3 を基に説明する。

1. 制御点 B_0 と B_1 、 B_1 と B_2 を結んだ線を $t:1-t$ の比率で分割した点を p_1, p_2 とする。
2. p_1, p_2 を結んだ線を $t:1-t$ の比率で分割した点が今回求めるベジエ曲線上の点となる。
3. 以上の作業を $0 < t < 1$ の範囲で繰り返して求めた点の集合がベジエ曲線となる。

4.7.2 B スプライン曲線

B スプライン曲線(B-spline curve)とは、与えられた複数の制御点とノットベクトルから定義されるパラメトリック曲線である。区分多項式により表現されているため、一部を変更しても曲線全体に影響は及ばない局所性が特徴としてあげられる。ベジエ曲線とともに、コンピュータグラフィックスの世界で広く利用されている。なお、B-spline は Basis spline(Basis

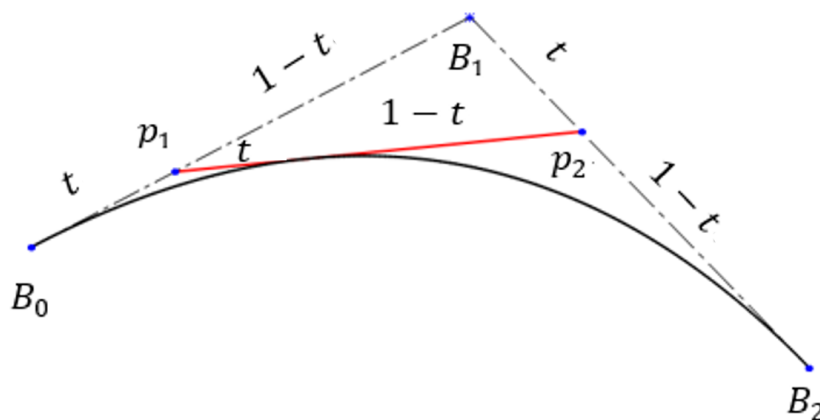


Fig.4.3 Bézier curve sample

=基底)の省略形である。ベジエ曲線と同じく、端点以外は一般的に制御点を通らない。

制御点を P_i とすると、 n 次の B スプライン曲線は以下のように表される。

$$S_B(t) = \sum_{i=0}^m P_i N_{i,n}(t), \quad t \in [t_0, t_{m-1}] \quad (4.6)$$

ここで、 $N_{i,n}$ はノット(Knot, ノットベクトル)と呼ばれる $m+1$ 個の実数(ベクトル)であり、 n は基底関数の次数である。制御点の個数を $p+1$ と置くと、 $m = n + p + 1$ が成り立たなければならない。また、 $N_{i,n}(t)$ は B-スプライン基底関数(B-spline basis function)であり、de Boor Cox の再帰公式によって次のように定義される。

$$N_{j,0}(t) = \begin{cases} 1(t_0 \leq t \leq t_{j+1}) \\ 0(t \leq t_j, t_{j+1} \leq t) \end{cases} \quad (4.7)$$

$$N_{j,k}(t) = \frac{t-t_j}{t_{j+k-1}-t_j} N_{j,k-1}(t) + \frac{t_{i+k}-t}{t_{j+k}-t_{j+1}} N_{j+1,k-1}(t) \quad (4.8)$$

4.7.3 ベジエ曲線との関係性

制御点列の始点から終点までをベジエ曲線で表す場合、制御点の内 1 つの位置を動かすと曲線全体の形状を左右するため凹凸の激しい部分が滑らかになってしまう。この問題を解決するには凹凸部分の制御点を増やすという方法が考えられるが、それではベジエ曲線の次数が上がってしまう。そこで、ベジエ曲線の良い性質を保ちながらこの問題を解決する方法として考えられたものが B スプライン曲線である。

また、 n 次 B スプライン曲線は以下のように制限することにより、 n 次ベジエ曲線と同一の式になる。

- ・ 基底関数の次数を n , 制御点の数を $p+1$ と置いて、 $n = p+1$ とする。
- ・ t は 0 から 1 まで変化するものとし、ノットは $N_j = 0$ for $j \leq p$, $N_j = 1$ for $j > p$ とする。

これら二つの条件を満たした B スプライン曲線は、ベジエ曲線と同一となるため、ベジエ曲線は B スプライン曲線の特殊系といえる。

4.8 形状最適化の流れ

図 4.1 に本研究で用いた、応答曲面法を用いた形状最適化のフローチャートを示した。この節では具体的な形状最適化の流れを記す。初めに設計空間の設定を行う。設計変数を設定し、どのように形状の変更を許容するかを決定する。形状をパラメータ化し、各パラメータを設計変数とする。次に、実験計画法に基づいた計画をするため、設計変数の範囲を決め、それぞれ等間隔の 3 水準系を設定し、設定された設計空間から直交表を作成する。因子が 3 つ、それぞれの因子の水準が 3 水準であるとすれば、すべての因子の組み合わせで交互作用を考慮した L27 直交表を作成する。直交表の作成で計画した組み合わせ通りのモデルを作成し、弾塑性解析を行う。解析結果から、特性値として最大累積相当塑性ひずみとエネルギー吸収量を得る。解析データから応答曲面法を用いて推定式を作成し、その推定式によって最適化計算を行う。エネルギー吸収量を制約条件に、最大累積相当塑性ひずみの最小化を目指す。最後に、この計算で得られた解について評価を行う。設計変数の最適値からモデルを作成し、弾塑性解析を行うことで得られた最大累積相当塑性ひずみの値を評価対象とする。この値が収束するまで設計変数の設定から評価までの工程を繰り返す。

4.9 計算例 1

前章の結果から左右中央部、上下中央部、そして図 4.4 のような位置に孔が空く傾向がわかっている。因子の数を最小限に抑えるため、3.8.5 項に示したモデルに対し、図 4.4 に示すように楕円形の半径 r_1 , r_2 と楕円の中心線の角度 θ をパラメータとした。左右中央部のみを削る計算例に関しては Liu ら⁽¹¹⁾がすでに行っているため、本研究ではこの形とした。

4.9.1 定式化

本項では、図 4.4 に示した楕円形の半径 r_1 , r_2 と楕円の中心線の角度 θ をパラメータとし、繰り返し漸増荷重を受けるパネルダンパーのエネルギー吸収量 EA の制約の下、変形能力の指標である最大累積相当塑性ひずみ $CEPS_{max}$ の最小化を目標とした。その定式化は、以下のようになる。

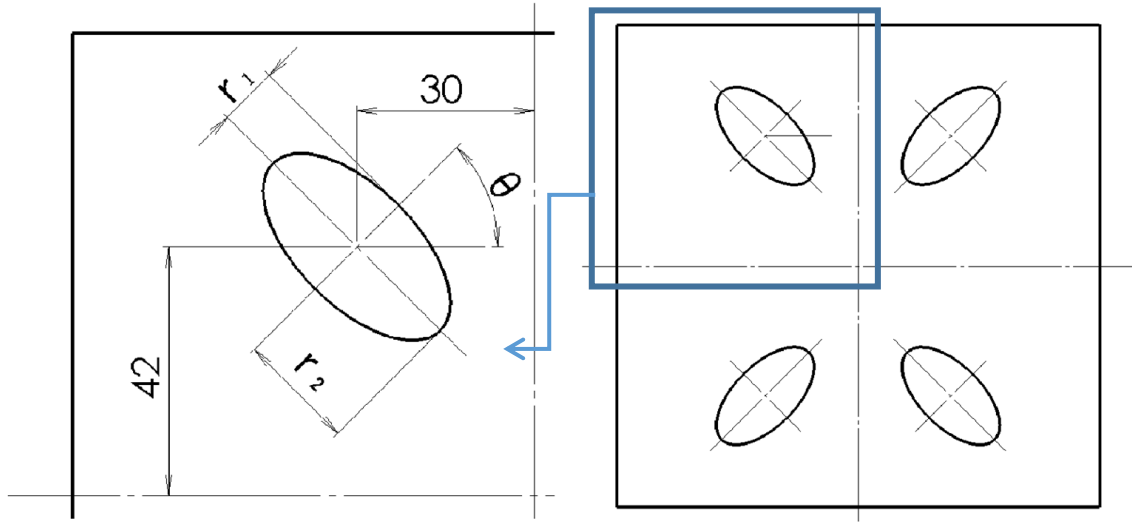


Fig.4.4 Shape parameterization

$$\text{Find } r_1, r_2, \theta \quad (4.9)$$

$$\text{Minimize } CEPS_{\max} \quad (4.10)$$

$$\text{Subject to } EA \geq k \cdot EA_0 \quad (4.11)$$

ここで、 $k(=0.8)$ は係数、 $EA_0(=5.80\text{kJ})$ は初期形状のエネルギー吸収量とする。

4.9.2 応答曲面法による推定式の作成

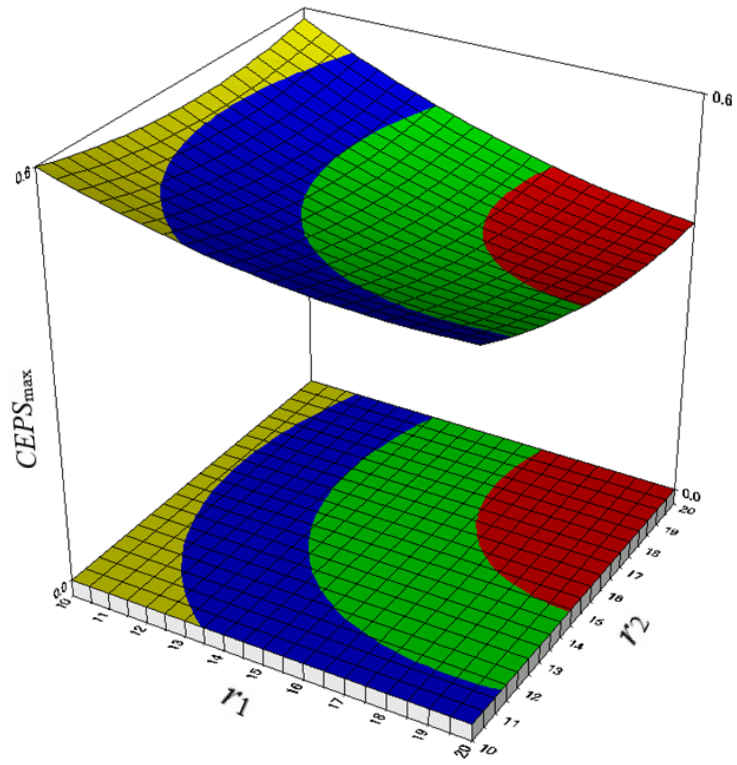
前節で示した最適化問題に対し、本研究では有限要素法による繰り返し弾塑性解析と実験計画法を組み合わせた応答曲面近似法を用いて形状最適計算を行った。

まず設計空間として、1回目の設計変数範囲は $10 \leq r_1 \leq 20$, $10 \leq r_2 \leq 20$, $15 \leq \theta \leq 75$ とし、それぞれ等間隔の3水準系を設定する。続いて設計変数 r_1 , r_2 , θ の3水準を無作為化し、L27 直交表を用いて表 4.4 に示す 27 種の組み合わせを設定する。そして変数の組み合わせからパネルダンパーのシェルモデルを作成し、繰り返し弾塑性解析により目的関数の最大累積相当塑性ひずみ $CEPS_{\max}$ と制約関数のエネルギー吸収量 E を特性値として求めた。得られた解析結果を表 4.4 に示す。また、の各設計変数及びそれに対応する特性値を用い、各評価関数の推定式は交互作用を考慮した直行多項式で近似され、それぞれ式(4.12) (4.13)のように求められた。

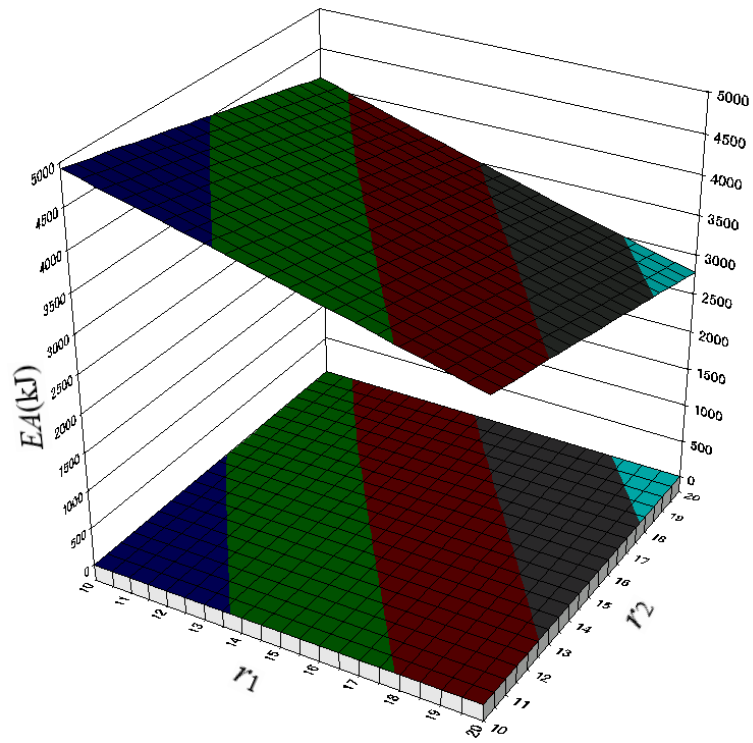
Table4.4 Design levels and numerical solutions in the first iteration

Design Point	r_1 (mm)	r_2 (mm)	$\theta(^{\circ})$	$CEPS_{max}$	$EA(kJ)$
1	10	10	15	0.6017	4.91
2	10	10	45	0.6017	4.91
3	10	10	75	0.6017	4.91
4	10	15	15	0.5615	4.50
5	10	15	45	0.5478	4.52
6	10	15	75	0.5707	4.44
7	10	20	15	0.5312	4.06
8	10	20	45	0.5408	4.15
9	10	20	75	0.6918	3.85
10	15	10	15	0.5509	4.36
11	15	10	45	0.5388	4.36
12	15	10	75	0.5275	4.41
13	15	15	15	0.4737	3.91
14	15	15	45	0.4737	3.91
15	15	15	75	0.4737	3.91
16	15	20	15	0.4567	3.44
17	15	20	45	0.4587	3.40
18	15	20	75	0.5001	3.29
19	20	10	15	0.5711	3.72
20	20	10	45	0.5266	3.75
21	20	10	75	0.4706	3.89
22	20	15	15	0.4972	3.27
23	20	15	45	0.4133	3.27
24	20	15	75	0.4375	3.37
25	20	20	15	0.4152	2.75
26	20	20	45	0.4152	2.75
27	20	20	75	0.4152	2.75

$$\begin{aligned}
CEPS_{max} = & 0.750 - 1.641 \times 10^{-2} r_1 + 3.956 \times 10^{-4} r_1^2 + 3.955 \times 10^{-2} r_2 - 9.811 \times 10^{-4} r_2^2 \\
& - 6.370 \times 10^{-4} \theta + 4.664 \times 10^{-5} \theta^2 - 6.41 \times 10^{-3} r_1 r_2 + 1.561 \times 10^{-4} r_1 r_2^2 \\
& + 2.431 \times 10^{-4} r_1^2 r_2 - 7.227 \times 10^{-6} r_1^2 r_2^2 + 1.996 \times 10^{-3} r_1 \theta - 2.309 \times 10^{-5} r_1 \theta^2 \\
& - 6.811 \times 10^{-5} r_1^2 \theta + 7.193 \times 10^{-7} r_1^2 \theta^2 - 1.934 \times 10^{-3} r_2 \theta + 1.680 \times 10^{-5} r_2 \theta^2 \\
& + 5.989 \times 10^{-5} r_2^2 \theta - 4.419 \times 10^{-7} r_2^2 \theta^2
\end{aligned} \tag{4.12}$$



(a) $CEPS_{max}$



(b) Total absorbing energy

Fig.4.5 Response surface plot in first iteration

$$\begin{aligned}
E = & 6418.812 - 66.951r_1 - 0.932r_1^2 - 155.879r_2 + 3.656r_2^2 \\
& + 37.193\theta - 0.429\theta^2 + 13.020r_1r_2 - 0.631r_1r_2^2 \\
& - 0.481r_1^2r_2 + 2.094 \times 10^{-2}r_1^2r_2^2 - 4.410r_1\theta + 4.466 \times 10^{-2}r_1\theta^2 \\
& + 0.121r_1^2\theta - 1.086 \times 10^{-3}r_1^2\theta^2 - 0.636r_2\theta + 1.350 \times 10^{-2}r_2\theta^2 \\
& + 4.486 \times 10^{-2}r_2^2\theta - 8.311 \times 10^{-4}r_2^2\theta^2
\end{aligned} \tag{4.13}$$

また、 $\theta=45^\circ$ であるときの r_1 , r_2 を変数とした最大累積相当塑性ひずみ $CEPS_{\max}$ およびエネルギー吸収量 EA の近似曲面を図 4.5 に示す。

4.9.3 最適化計算

前節で設定した 1 回目の設計変数に対して作成した特性値の推定式により，4.9.1 項に定式化された最適化問題の計算を行った．最低許容エネルギー吸収量 $0.8 \cdot EA_0=4.64\text{kJ}$ の制約の下で，1 回目の最適化計算は表 4.5 に示しているように，形状パラメータは $r_1=10.2\text{mm}$ ， $r_2=13.0\text{mm}$ ， $\theta=45.0^\circ$ となり，最大累積相当塑性ひずみは $CEPS_{\max}=0.5555$ となった。

より厳密な解を求めるため，得られた最適解の近傍において設計水準を更新し，特性値の推定式を再度作成し，さらに最適化計算を繰り返した．最適化計算は 6 回行って収束し，その計算履歴を表 4.5 に示す．最適形状における累積相当塑性ひずみ分布を図 4.6 に示し，最適化された最終形状の最大累積相当塑性ひずみは $CEPS_{\max}=0.5348$ となり，初期形状に比べて 24.4%減少した．前章 3.8.4 項に示した初期形状に比べ，隅角部における累積相当塑性ひずみの集中が緩和され，均一化されていることがわかる。

Table4.5 Design levels and optimization result

		1st	2nd	3rd	4th	5th	6th
Design levels	$r_1(\text{mm})$	10 15 20	5 10 15	7 12 17	7 12 17	7 12 17	10 12 14
	$r_2(\text{mm})$	10 15 20	8 13 18	5 10 15	5 10 15	6 11 16	8 10 12
	$\theta(^{\circ})$	15 45 75	30 45 60	34 44 54	44 54 64	44 54 64	44 54 64
Optimization results	$r_1(\text{mm})$	10.2	12.3	12.3	11.9	12.4	12.4
	$r_2(\text{mm})$	13.0	10.3	10.1	10.9	10.1	10.2
	$\theta(^{\circ})$	45.0	43.9	54.0	54.0	54.0	54.0
	$CEPS_{\max}$	0.5555	0.5398	0.5430	0.5495	0.5367	0.5348
	$EA(\text{kJ})$	4.66	4.63	4.68	4.65	4.66	4.65

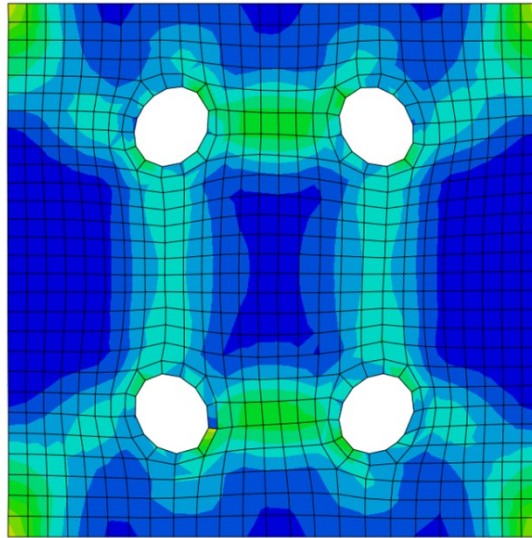


Fig.4.6 CEPS distribution of optimization shape

4.10 計算例 2

計算例 1 と同じく 3.8.5 項のモデルに対し，図 4.7 に示すようにベジエ曲線の制御点の位置を表す 5 つのパラメータ l_t , l_b , l_r , l_w を設計変数とし，制約値である最低許容エネルギー吸収量は計算例 1 と同じとして最適化計算を行った．計算例 1 のモデルに対し，孔の形状の自由度が増しているため，より最適な形状が得られると考えられる．

最適化計算は 5 回行って収束し，その計算履歴を表 4.6 に示す．最適形状における累積相当塑性ひずみ分布を図 4.8 に示し，最適化された最終形状の最大累積相当塑性ひずみは

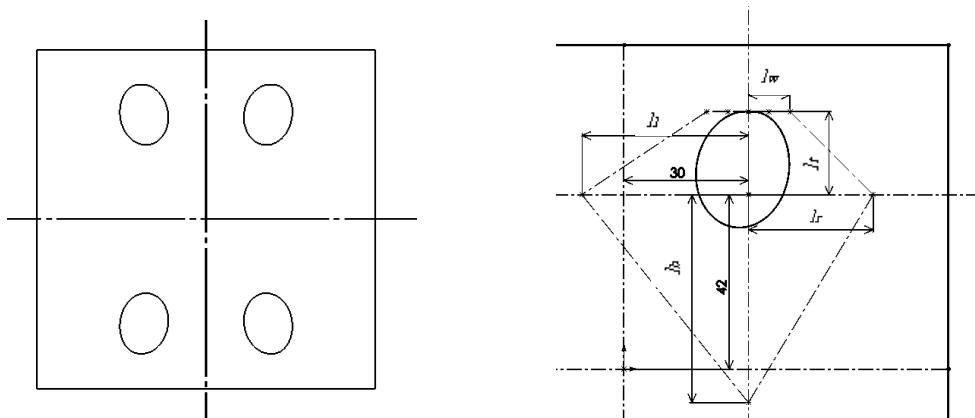


Fig.4.7 Shape parameterization

Table 4.6 Design levels and optimization result

		1st	2nd	3rd	4th	5th
Design levels	$l_t(\text{mm})$	20 25 30	15 20 25	10 15 20	9 13 17	10 13 16
	$l_l(\text{mm})$	20 25 30	15 20 25	10 15 20	9 13 17	10 12 14
	$l_b(\text{mm})$	30 60 90	37 67 97	41 61 81	53 63 73	58 64 70
	$l_r(\text{mm})$	20 25 30	25 30 35	30 35 40	33 36 39	31 34 37
	$l_w(\text{mm})$	10 15 20	15 20 25	13 18 23	18 20 22	19 20 21
Optimization results	$l_t(\text{mm})$	20.0	15.0	13.4	12.8	11.2
	$l_l(\text{mm})$	22.6	15.0	12.8	12.4	10.0
	$l_b(\text{mm})$	33.4	61.2	62.5	64.0	64.5
	$l_r(\text{mm})$	25.0	35.0	35.9	34.4	35.0
	$l_w(\text{mm})$	10.0	17.6	20.1	20.2	19.6
	$CEPS_{\max}$	0.6238	0.4557	0.4603	0.4436	0.4261
	$EA(\text{kJ})$	4.87	4.24	4.18	4.19	4.25

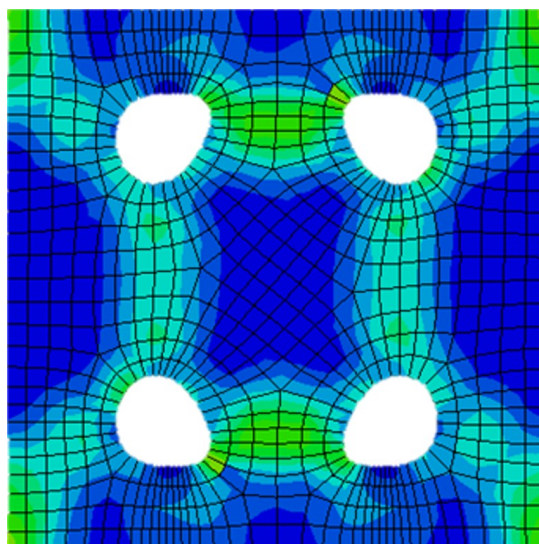


Fig.4.8 CEPS distribution of the optimization shape

$CEPS_{\max}=0.4261$ となり，初期形状に比べて 39.8%減少した．計算例 1 に比べ，孔の形状を表すパラメータを増やし，自由度を増やしたことにより，より目的関数を低下させることができたことがわかる．このことから，より自由度の高い形状の表現ができるパラメータ化を行うことができれば，一層目的関数を低下させた形状を創出できると考えられる．

4.11 計算例 3

設計変数として，図 4.9 に示すようにベジエ曲線の制御点の位置を H_w ， H_h 及び V_h ， V_w で表し，その 4 つをパラメータとした．制約値である最低許容エネルギー吸収量は他の計算例

と同じとして最適化計算を行った．次に，孔の形状ではなく，変形能力に対する影響度が高いと思われる上下左右の形状をベジエ曲線で表現したモデルを対象とした．前章の結果でわかるとおり，孔の形状による変形能力の向上に比べ，影響度が高い部分を設計対象としているため，計算例 2 よりも更に性能の向上が見込めると考えられる．なお，一定以下の体積制約において更に孔を空ければ，より性能の向上が見込めると考えられるが，因子の増加によるコストが大きくなりすぎるためこの形とした．

最適化計算は 5 回行って収束し，その計算履歴を表 4.7 に示す．最適形状における累積相当塑性ひずみ分布を図 4.10 に示し，最適化された最終形状の最大累積相当塑性ひずみは $CEPS_{\max}=0.2767$ となり，初期形状に比べて 60.9%減少した．最適形状の累積相当塑性ひずみの分布について，図 4.10 のように累積相当塑性ひずみが全体に均一化されており，せん断型パネルダンパーの変形能力の大きな向上が達成できたと考えられる．

また，上述した仮説のように，トポロジー最適化の結果から，変形能力の向上に影響度が高いと考えられるモデルの上下左右中央部の形状を設計対象としたことにより，他の計算例に比べ，計算コストが同程度にもかかわらず高い性能向上が得られたことがわかる．なお，パネル部左右の隅角部周辺はトポロジー最適化の場合ある程度残っていたが，形状最適化ではほとんど残らなかった原因としては形状パラメータ数を最小限に抑えようとした結果，形状の自由度が下がり形状がうまく表現できなかったためだと考えられる．

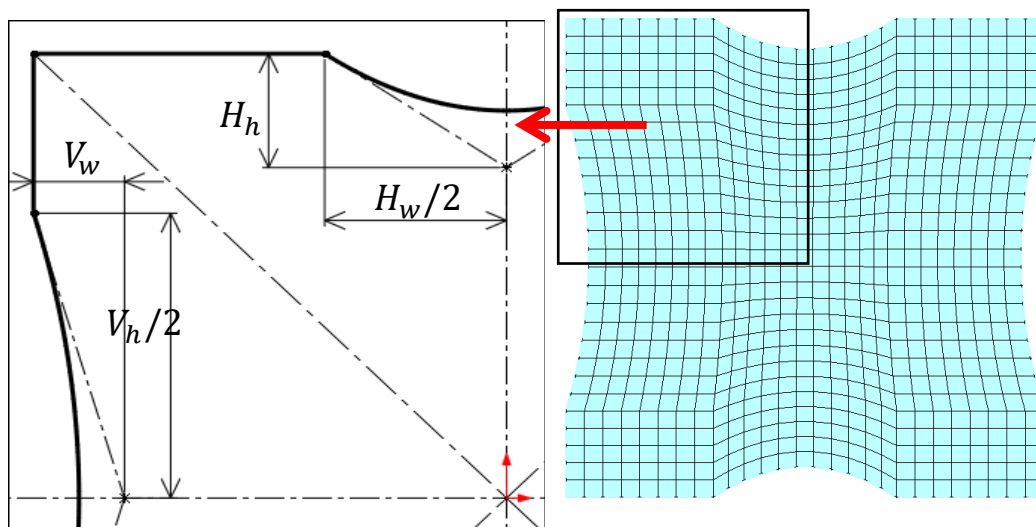


Fig.4.9 Shape parameterization

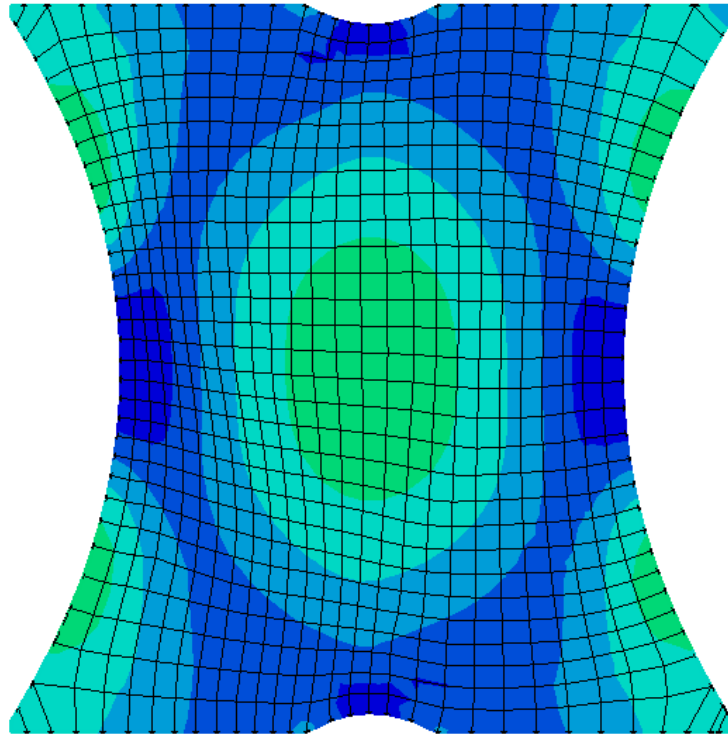


Fig.4.10 CEPS distribution of the optimization shape

Table4.7 Design levels and optimization result

		1st	2nd	3rd	4th	5th
Design levels	$H_w(\text{mm})$	30 40 50	25 30 35	25 30 35	26 29 32	27 30 33
	$H_h(\text{mm})$	10 15 20	8 11 14	6 9 12	6 9 12	7 10 13
	$V_h(\text{mm})$	60 80 100	70 100 130	110 130 150	145 150 155	147 150 153
	$V_w(\text{mm})$	20 25 30	25 30 35	35 40 45	40 45 50	44 47 50
Optimization results	$H_w(\text{mm})$	30.0	25.0	29.1	29.8	28.5
	$H_h(\text{mm})$	11.0	8.9	8.7	10.2	8.5
	$V_h(\text{mm})$	100.0	130.0	150.0	150.1	151.2
	$V_w(\text{mm})$	30.0	35.0	45.0	47.3	47.8
	$CEPS_{\max}$	0.6690	0.4393	0.2791	0.2794	0.2767
	$EA(\text{kJ})$	5.51	5.3	4.83	4.76	4.74

4.12 まとめ

せん断型パネルダンパーに対し，計算例 1，2 はパネル内部に孔を空け，その形状の自由度が高ければ求める性能をより追求できることがわかった．計算例 3 のトポロジー最適化結果を基に形状のパラメータ化を行った結果は，計算例 2 と比べても大幅な性能の向上が見られた．これは，トポロジー最適化により最適形状の傾向をつかみ，パラメータ化を行う

ことで、より性能を期待できる形状の創出が可能であるといえる。また、パラメトリック手法では本章の結果から分かる通り、パラメータの依存性が高く、トポロジー最適化の結果と形状の大きな差異が見られた。加えて、形状のパラメータ化を行う特性上、属人化が認められ、応答曲面法の性質上複数のモデルを作成する必要があるため、因子や水準の個数によっては莫大な人的コストがかかってしまう恐れがある。よって次章ではパラメータ化を用いない手法の構築を行う。

参考文献

- (1) Myers, R. H., Montgomery, D. C. and Anderson-Cook, C. M., Response surface methodology, Process and product optimization using designed experiments, 3rd Ed., Wiley, (2009).
- (2) Cochran, W. G. and Cox, G., M., Experimental designs, 2nd Ed., Wiley, (1992).
- (3) Box, G. E. P. and Behnken, D. W., Some new three level designs for the study of quantitative variables, Technometrics, Vol.2, (1960), pp.455-475.
- (4) Takayama, K., Morva, A., Fujikawa, M., Hattori, Y., Obata, Y. and Nagai, T., Formula optimization of theophylline controlled-release tablet based on artificial neural networks, controlled release, Vol.68, (2000), pp.175-186.
- (5) Derringer, G. and Suich, R., Simultaneous optimization of several response variables, Quality Technol., Vol.12, (1980), pp.214-219.
- (6) Costa, N. R. and Pereira, Z. I., Multiple response optimization: A global criterion-based method, Chemom, Vol.24, (2010), pp.333- 342.
- (7) Anarjan, N., Mirhosseini, H., Baharin, B. S. and Tan, C. P., Effect of processing conditions on physicochemical properties of astaxanthin nanodispersions, Food Chem., Vol.123, (2010), pp.477- 483.
- (8) Mercali, G. D., Ferreira Marczak, L. D., Tessaro, I. C. and Zapata Noreña, C. P., Evaluation of water, sucrose and NaCl effective diffusivities during osmotic dehydration of banana (*Musa sapientum*, shum.), LWT, Vol.44, (2011), pp.82-91.

- (9) Thiollet, S., Bessant, C. and Morgan, S. L., Application of multiple response optimization design to quantum dot encoded microsphere bioconjugates hybridization assay, *Anal. Biochem.*, Vol.414, (2011), pp.23-30.
- (10) Afsah-Hejri, L., Jinap, S., Arzandeh, S. and Mirhosseini, H., Optimization of HPLC conditions for quantitative analysis of aflatoxins in contaminated peanut, *Food Control*, Vol.22, (2011), pp.381- 388.
- (11) Liu, Y., and Shimoda, M., Shape optimization of shear panel damper for improving the deformation ability under cyclic loading, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol.48, No.2(2013), pp.427-435.

第5章 ノンパラメトリック境界特定手法

5.1 はじめに

本章では、形状のパラメータ化プロセスを含まない、トポロジーの最適化結果における境界特定のためのパラメータフリー手法を提案し、トポロジー最適化の結果を製作プロセスに直接適用することを目指す。本手法は、まず、密度法に基づくトポロジー最適化を行い、その得られた結果におけるグレースケールやチェッカーボードパターンは、材料の充填や削除プロセスに組み込まれた自動アルゴリズムによって処理される。次に、境界要素のトリミングプロセスを用い、ジグザグな形状から明瞭かつ平滑な境界形状を特定する。しかしながら、ここまでの境界平滑処理はジオメトリデータのみに基づいて行われ、体積制約値や目的関数は考慮されていない。そのため、本研究では H^1 勾配法(Traction method, 力法)⁽¹⁾に基づくパラメータフリー形状最適化プロセスを導入し、体積制約を満たしながら滑らかな最適境界形状を求める。本手法の有効性と実用性を検証するため、3つの数値例を提示し、得られた結果を STL モデルに変換して市販の熱溶解積層方式(FDM 方式)の 3D プリンターで直接製造できることを明らかにする。

5.2 概要

トポロジー最適化によって得られた不連続な境界の平滑処理に関する主な手順の概要を示す。図 5.1 は、インハウスプログラムと汎用 FEM コードで構成される本手法のフローチャートである。本手法は、大きく分けて次の 4 ステップで構成される。ステップ 1 では、設計領域およびトポロジー最適化と形状最適化の設計条件の設定を行う。ただし、形状最適化の設計条件に関し、トポロジー最適化で得られる最適構造によってはステップ 3 の後に調整が必要になるため、実設計においては設計領域の設定に十分な注意が必要である。ステップ 2 では、トポロジー最適化により最適構造を求める。このとき、第 2 章で述べた密度法を用いる。ステップ 3 では、ステップ 2 で得られた最適構造の要素依存性によるジグザグな外形形状を後述する境界平滑処理で十分に滑らかにする。ここで、要素の除去手順に付随す

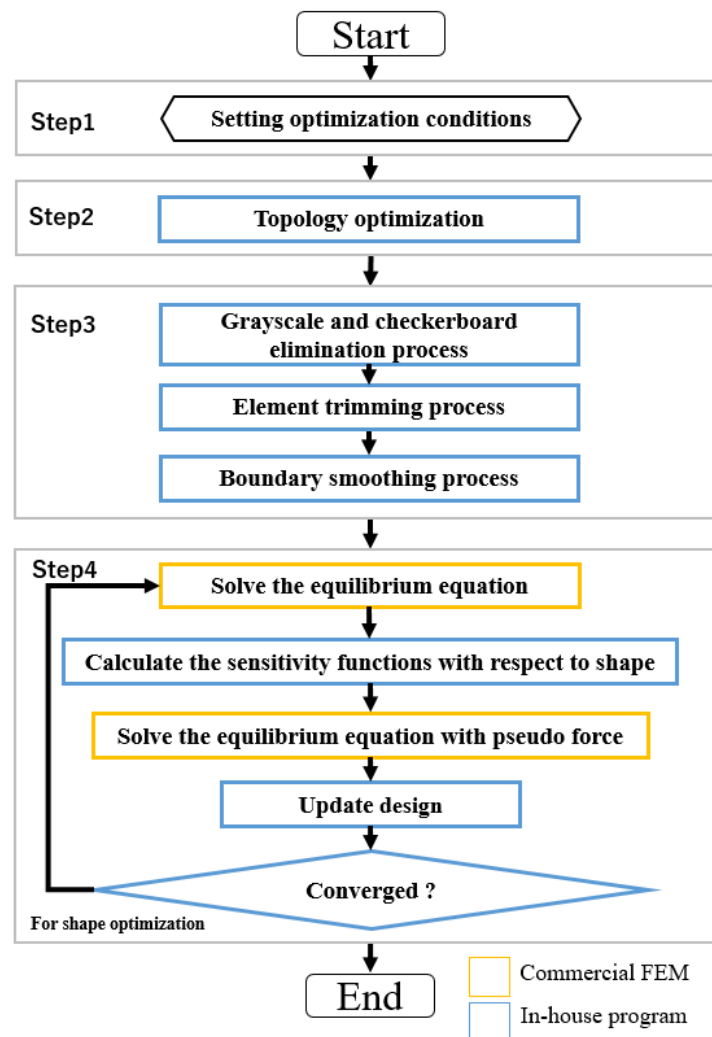


Fig.5.1 Flowchart diagram of the parameter-free methodology for boundary identification

る自動アルゴリズムによって，チェッカーボードパターンおよびグレースケールは材料で充填もしくは削除される．ステップ 4 ではステップ 3 で得られた形状に対し，形状最適化を行うことにより詳細な最適形状を創出する．以下に各ステップの詳細を述べる．

5.3 ステップ 1：設計領域と設計条件の設定

ここでは，最適化計算で求めたい最適構造の領域を内包する設計領域 Ω と固定や荷重といった境界条件 Γ を設定する．また，最適計算時に用いる体積制約に必要な条件値の設定も行う．さらに，ステップ 4 の形状最適化過程で行う形状解析(速度場解析)に必要な拘束条

件の設定も行う．

5.4 ステップ 2：トポロジー最適化

このステップでは，ステップ 1 で設定した設計領域と設計条件に従い，構造メッシュで分割された領域に対してトポロジー最適化を行う．本研究では，密度法(SIMP 法)に基づき材料の最適分布を求める．このとき，一般に広く利用されている変位法に基づく双一次形状関数によるアイソパラメトリック要素を用いると，せん断応力の過大評価により，チェッカーボードパターンを生成する場合が多い⁽²⁾．しかし，次のステップでチェッカーボードは材料で充填もしくは削除され，非常に薄いパーツや孤立した島を回避するようにしている．

5.4.1 トポロジー最適化問題の定式化

トポロジー最適化では，構造最適化問題を与えられた領域 Ω 内の材料分布問題に置き換え，制約条件の下で，目的汎関数の最小化もしくは最大化を目標とする．本研究では，様々な文献で新しい手法をテストするために広く使用されている平均コンプライアンス最小化(剛性最大化)問題を考える．この最適化問題の定式化は，以下のように示される．

$$\min_{\mathbf{u} \in U} l(\mathbf{u}) \quad (5.1)$$

$$\text{subject to } a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}), \quad \mathbf{u} \in U, \quad \forall \mathbf{v} \in U \quad (5.2)$$

$$M = \int_{\Omega} d\Omega \leq M \quad (5.3)$$

ここで，式(5.2)の平衡方程式は弱形式で示され， U は運動学的に許容される変位場の 1 階ソボレフ空間を示す．また， $\mathbf{v} = \{v_1, v_2, v_3\}$ は，支配方程式の随伴変数である．また， M は体積制約値を示し， $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ および $l(\mathbf{v})$ は式(5.4)，式(5.5)で定義される．

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} E_{ijkl} u_{k,l} v_{i,j} d\Omega \quad (5.4)$$

$$l(v) = \int_{\Omega} f_i v_i d\Omega + \int_{\Gamma_N} t_i v_i d\Gamma \quad (5.5)$$

ここで、 E_{ijkl} は弾性テンソル、 f は領域内の体積力、 t は境界 $\Gamma_N \subset \partial\Omega$ におけるノイマン境界条件を示す。

密度法に基づくトポロジー最適化では、ある与えられた設計領域内の等方性材料の最適分布を求めることが目的である。このようなトポロジー最適化問題を解決する手法として SIMP(Solid Isotropic Material with Penalization)法は最も成熟した手法であり、一般に使用されてきた。その中で材料分布を簡便に表現するため、各要素に 0 から 1 までの値を用いて正規化された仮想的な材料密度を導入する。このとき、要素密度 ρ と弾性テンソルの関係は、以下のように示される。

$$E_{ijkl}(x) = \rho(x)^p (E_{ijkl}^1 - E_{ijkl}^0) + E_{ijkl}^0, \quad p > 1 \quad (5.6)$$

$$\rho(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in \Omega \\ 0 & \text{if } x \in D \setminus \Omega \end{cases} \quad (5.7)$$

ここで、 Ω は物体領域、 $D \setminus \Omega$ は非物体領域を示し、 $\rho(x)$ は各要素の材料密度、 $E_{ijkl}(x)$ は各要素の弾性テンソル、 E_{ijkl}^0 および E_{ijkl}^1 は要素密度がそれぞれ 0 と 1 のときの弾性テンソル、 p は中間的な材料密度に対するペナルティ係数である。

5.4.2 トポロジー感度の導出

ラグランジュ未定乗数法(Method of Lagrange multiplier)とは、いくつかの制約条件の下で最適化を行うための数学的な方法である。いくつかの変数に対し、いくつかの関数の値を固定するという制約条件の下、別のある 1 つの関数の極値を求めるという問題を考える。このとき、各制約条件に対して未定乗数(Lagrange multiplier)を用意し、これらを係数とする線形結合を新しい関数として考えることで、制約問題を通常の極値問題として解くことができる。式(2.8)、(2.9)に対して以下のようにラグランジアン L を考える。

$$L(\Omega, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \Lambda_T) = l(\mathbf{u}) - a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + l(\mathbf{v}) + \Lambda_T \left(\int_{\Omega} d\Omega - \hat{M} \right) + \int_{\Omega} [\lambda_0 (\rho_{\min} - \rho) + \lambda_1 (\rho - 1)] d\Omega \quad (5.8)$$

ここで、 $0 \leq \rho_{\min} \leq \rho \leq 1$ であり、 $\Lambda_T, \lambda_0, \lambda_1$ は未定乗数である。また $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ ，すなわち自己随伴することができ、ラグランジュ汎関数の変分 δL を求めると式(5.9)となる。

$$\delta L = - \int_{\Omega} E_{ijkl} u_{k,l} v_{i,j} \delta \rho d\Omega + \Lambda_T \int_{\Omega} \delta \rho d\Omega + \int_{\Omega} [\lambda_0 (-\delta \rho) + \lambda_1 (\delta \rho)] d\Omega \quad (5.9)$$

$$\lambda_0 \geq 0, \quad \lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_0 (\rho_{\min} - \rho) = 0, \quad \lambda_1 (\rho - 1) = 0 \quad (5.10)$$

$$\rho_{\min} - \rho \leq 0, \quad \rho - 1 \leq 0 \quad (5.11)$$

式(5.10)を満たした上で式(5.11)が非活性であるとすれば、 $\lambda_0 = \lambda_1 = 0$ であるから、式(5.9)より、トポロジー感度 G_{ρ} は以下となる。

$$G_{\rho} = -p\rho(x)^{p-1} E_{ijkl} u_{k,l} v_{i,j} + \Lambda_T \quad (5.12)$$

式(5.12)において、 Λ_T は 2.7.4 項で述べた最適性基準法を用いて求められる。また、弾性テンソルが式(5.6)のように単純な式によって得られるため、プログラムの実装は容易であることが密度法の大きな長所である。しかし、要素ごとに独立した密度変数を配置しているため、要素間での不連続性が生じ、チェッカーボードが見られることがある。また、グレースケールや材料分布のメッシュ依存性によりトポロジー最適化結果を直接製造モデルに変更することは不可能である。

5.5 ステップ3：境界の平滑処理

5.5.1 境界平滑処理

本章に、密度変動型トポロジー最適化結果における境界の平滑処理を行う各プロセスを

説明する．簡単のため本論文は2次元問題として扱うが，3次元問題の場合， z 軸成分を増やす必要がある．トポロジー最適化では，パラメータによっては鎖状に細長い部分や孤立した島のような部分や，チェッカーボードパターン，グレースケールなどが発生する場合があるため，本手法の第一段階はそれらを解消する．トポロジー最適化において有限要素分割した要素の材料の有無は， i 番目の要素の設計変数を ρ_i^n とすると，差分を用いた以下の式に従って材料の充填と削除が行われる．

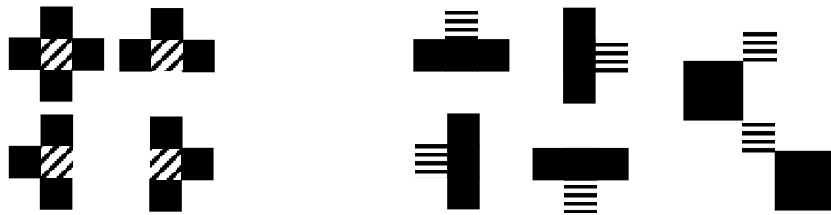
$$\theta_i^1 = D_i^{-x} + D_i^{+x} + D_i^{-y} + D_i^{+y} \quad (5.13)$$

$$\rho_i^{n+1} = \begin{cases} 1 & \text{if } \theta_i^1 \geq 3 \\ \rho_i^n & \text{if } 1 < \theta_i^1 < 3 \\ 0 & \text{if } \theta_i^1 \leq 1 \end{cases} \quad (5.14)$$

ここで， D_i^{+x} ， D_i^{+y} はそれぞれ x 座標， y 座標に関する前進，後進差分の絶対値を表す．図5.2の斜線部に示す要素は材料が充填されて物体領域となり，横線部にある要素は設計変数が0とみなされることから非物体領域となる．

次に，境界の平滑化を容易にするため，ジグザグ形状の角を有する四角形要素をカットして三角形要素に修正する．対象となる要素は差分を用いて次の式で判別される．

$$\theta_i^2 = D_i^{-x} - D_i^{+x} + D_i^{-y} - D_i^{+y} \quad (5.15)$$



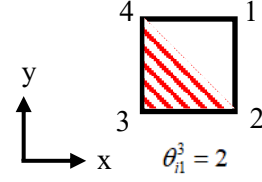
(a) Element addition cases

(b) Element elimination cases

Fig.5.2 Addition and elimination processes for grayscale and checkerboard patterns

(\diagup : Addition, \equiv : Elimination)

0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0
1	1	1	1	1	0
1	1	1	1	1	0



(a) Trimming element identification

(b) Trimming node identification

Fig.5.3 Identification algorithm for the element trimming process

図 5.3(a)の赤枠に示す要素は、2次元問題においては $\theta_i^2 = 2$ となる要素であり、四角形要素の角をカットして三角形要素にするには、いずれの節点をなくすのかを決めなければならない。その対象となる節点は、図 5.3(b)のように $\theta_i^2 = 2$ となった要素を一つ取り出し、節点の位置番号をつけ、式(5.16)を用いて判別される。このとき、2次元問題においては、 $\theta_i^3 = 2$ となる節点が対象の節点となる。

$$\theta_i^3 = \begin{bmatrix} \theta_{i1}^3 \\ \theta_{i2}^3 \\ \theta_{i3}^3 \\ \theta_{i4}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_i^{+x} + D_i^{+y} \\ D_i^{+x} + D_i^{-y} \\ D_i^{-x} + D_i^{-y} \\ D_i^{-x} + D_i^{+y} \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

最後に境界上において、平滑処理の対象となる節点を隣り合う節点と構成する三角形の重心方向に移動させる。このとき、境界を $\partial\Omega$ とし、節点の位置ベクトルを P_i ，ダンピング係数を ζ とすると、境界平滑処理後の位置ベクトル P_{i+1} は以下に示される。

$$P_{i+1} = P_i + \zeta \Delta P_i \quad (5.17)$$

$$\Delta P_i = \sum_{j \in \partial\Omega} \frac{P_j}{n} - P_i \quad (5.18)$$

ここで、 ΔP_i は位置ベクトルの変動量を示し、 P_j はある節点に隣接する節点の位置ベクトルであり、 n はその隣接する節点の個数である。ダンピング係数 ζ は性急な変形による本来の構造の特徴の消失、境界の不連続性の発生を緩和するため、 $1 \leq \zeta < 0$ で特に 1 未満が望ましい。図 5.4 に境界平滑処理の模式図を示す。式(5.18)を用いた平滑化処理を反復して行うことにより、形状が徐々に滑らかになる。

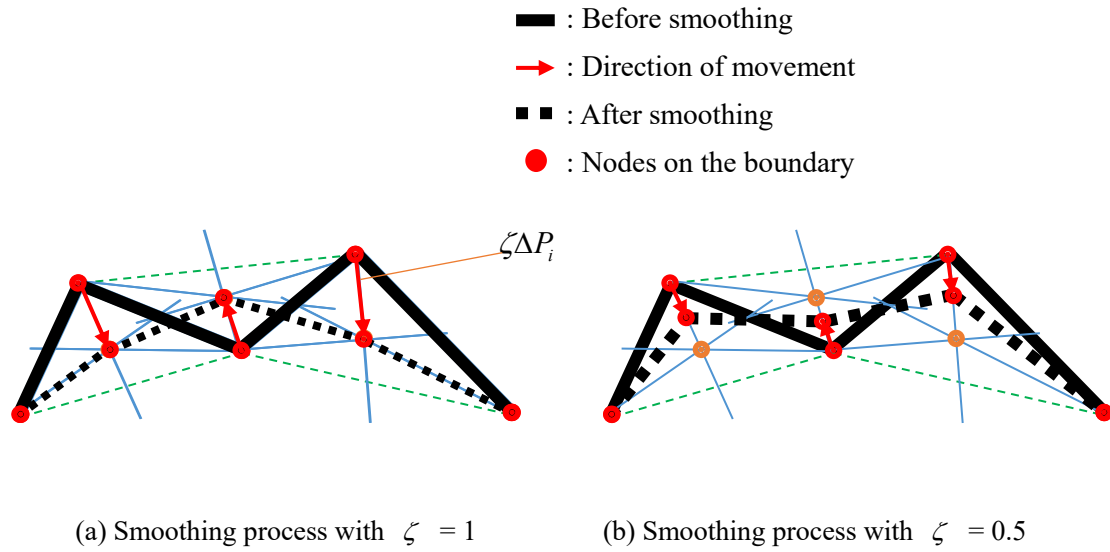


Fig.5.4 Schematic diagram of the boundary smoothing process considering the effect of ζ . The green dotted line is an auxiliary line used to show the triangle with a corresponding node and two other adjacent nodes. The blue line is used to show the triangle center that links three apices and the opposite sides

5.5.2 パラメータによる影響

式(5.17)においてダンピング係数の影響を見るために図 5.5(a)のような形状があったとする。その形状に対しダンピング係数 ζ を 1, 0.8, 0.5, 0.2 として式(5.17)を用いた平滑化計算を一度だけ行った結果を図 5.5(b)-(e)に示す。図 5.5(a)の形状の特徴として、2つの山があり、左が尖った山、右が上に小高い山となっている、 ζ が1である場合、左の山は完全になくなり、右の山は麓の凹みとの境界がほとんど分からなくなっていることがわかる。このため、もし形状平滑化前の形状の特徴を残したい場合、 ζ が大きすぎると不都合であることがわかる。また、 ζ が小さくなっていくほど形状の特徴を残していることが確認できる。しかし、 ζ が小さければ常に特徴を残し続けるわけではなく、形状平滑処理を繰り返すことでどの値であっても同じ形状に近づく。例として図 5.6 に図 5.5(a)の形状に対し、 $\zeta=1$ で5回計算した結果と $\zeta=0.2$ で25回計算した結果を示す。

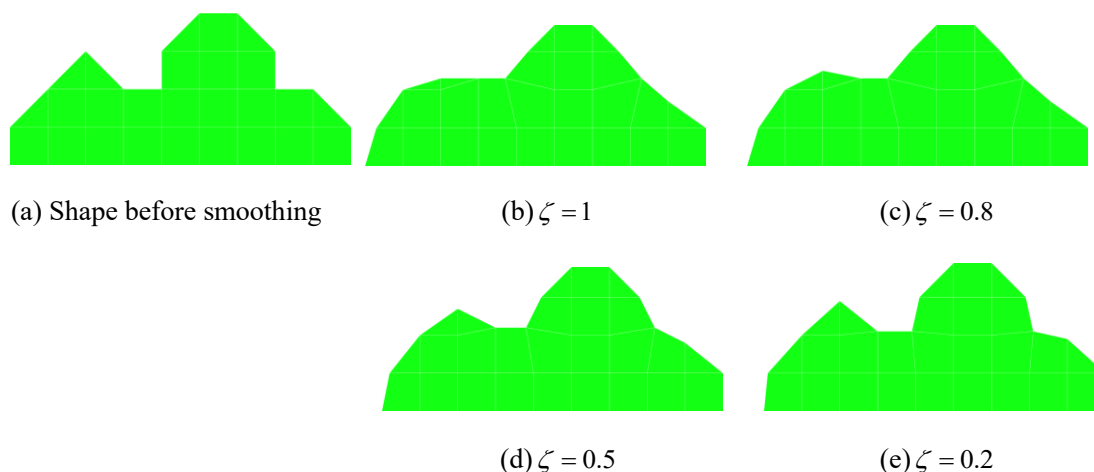


Fig.5.5 Schematic diagram of the effect of ξ



Fig.5.6 Schematic diagram of the effect of ξ

5.6 ステップ 4 : 形状最適化

5.6.1 形状最適化

形状最適化は、1973 年の Zienkiewicz と Campbell⁽³⁾により実用的展開が始められた。この手法は、概念的には設計変数が外形形状そのものであるが、計算上は設計変数を有限要素モデルの節点の座標位置としている。有限要素法により釣り合い状態と設計感度を求め、その感度を用いて最適化手法により節点位置を移動することで外形形状を更新する。しかし、形状最適化の過程において、単純な節点位置の更新では境界形状の更新の際に外形形状が非平滑な波打ち現象と呼ばれる特異な現象が生じる。そこで、滑らかな最適形状を得るために、形状最適化では H^1 勾配法を採用している。この方法は 1994 年に畔上⁽⁴⁾により提案された方法で、設計感度の平滑化に楕円形の偏微分方程式を用いている。代表的な楕円形の方程式に静的な弾性釣り合い方程式があり、この場合に分布荷重が入力で、変位場が出力と見なすことができる。荷重分布を非平滑な分布として与えても変位場は滑らかな分布となることか

ら、この関係を利用して設計感度を入力として与えれば、平滑化された設計感度を得ることができる。その設計感度を用いて形状更新を行うことにより、滑らかな外形形状をもつ最適構造が得られる。前ステップにおける境界平滑処理はジオメトリデータでのみ行われるため、最適化における目的関数の増加や、体積制約を満足しない可能性がある。したがって、このステップにおける形状最適化は、体積制約を満足し、目的関数を最小化した滑らかな最適形状を得るために新たに確立された境界に対して適用する。その最適形状を得る形状最適化では、 H^1 勾配法を採用して最終的な境界を特定する。なお、形状最適化問題の定式化はトポロジー最適化と同じものとなるため、5.4.1 項を参照されたい。

5.6.2 形状感度の導出

平均コンプライアンス最小化(剛性最大化)問題に対するラグランジュ汎乗数 L は \mathbf{v}, Λ_s をそれぞれ状態方程式と体積制約に対するラグランジュ乗数として次のように表される。

$$L(\Omega, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \Lambda_s) = l(\mathbf{u}) - a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + l(\mathbf{v}) + \Lambda_s \left(\int_{\Omega} d\Omega - \hat{M} \right) \quad (5.19)$$

ラグランジュ汎乗数 L の領域変動に対する導関数 \dot{L} は次式のように表される。

$$\dot{L} = \dot{l}(\mathbf{u}) - a(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) - a(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{v}}) + \dot{l}(\dot{\mathbf{v}}) + \dot{l}_G(V) \quad (5.20)$$

$$l_G(V) = \int_{\Gamma} \left(-E_{ijkl} u_{k,l} v_{i,j} + \Lambda_s \right) V_n d\Gamma \quad (5.21)$$

ただし、 $V_n = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$ である。形状感度(形状勾配関数 G)を次の一次形式で表す。

$$G = -E_{ijkl} u_{k,l} v_{i,j} + \Lambda_s \quad (5.22)$$

体積制約を満たすように決定されるラグランジュ乗数 Λ_s は、形状勾配関数を外力として与えるとき、一様な表面力と考えることができ、大きさ Λ_s の一様な表面力を目標値へ制御することにより制約条件を満足させることができる⁽⁴⁾。

5.7 数値例

本研究で構築したシステムの有効性と実用性を検証するために、3つの計算例に適用した。なお、計算例における材料特性はヤング率 $E=210\text{GPa}$ 、ポアソン比 $\nu=0.3$ の等方性線形弾性材料で構成される。

5.7.1 計算例 1

図 5.7(a)に示す縦横比 4:5 の長方形の設計領域に対し、左辺を完全固定、右辺中央、高さの 1/5 の領域に下向き荷重を加えたモデルを対象とし、体積制約の下で剛性最大化の計算を

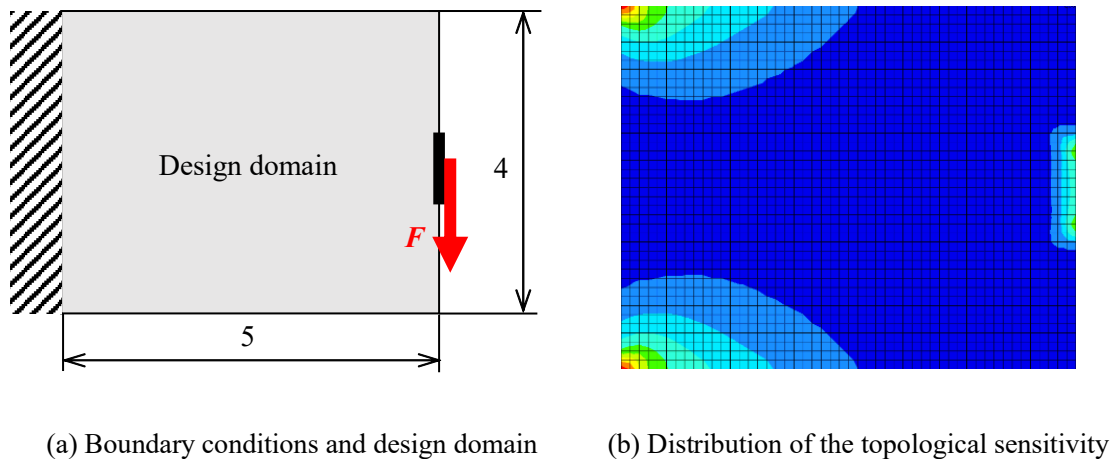


Fig.5.7 Design domain of a cantilever model and its topology optimization result

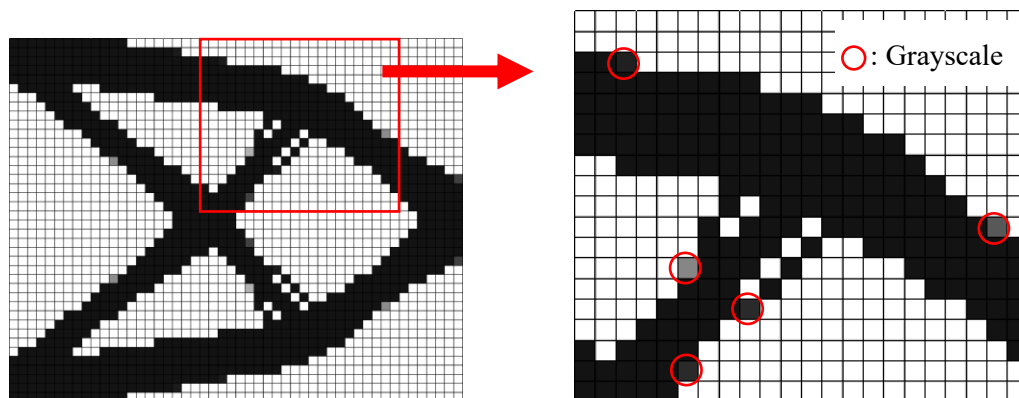
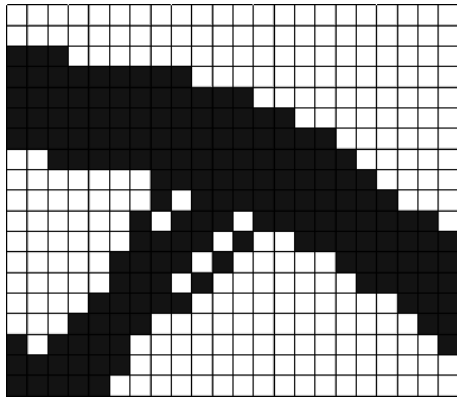
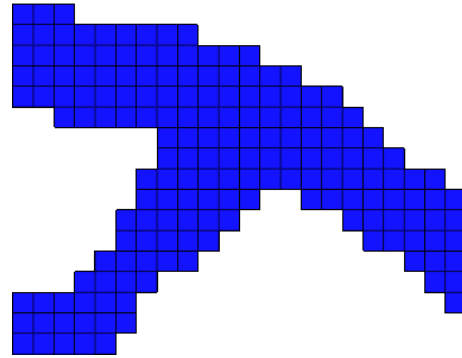


Fig.5.8 Density distribution of the topology optimization result



(a) Addition and elimination process



(b) Checkerboard elimination process

Fig.5.9 Grayscale and checkerboard elimination process

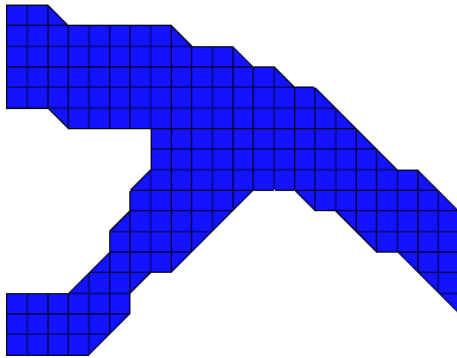


Fig.5.10 Element trimming process

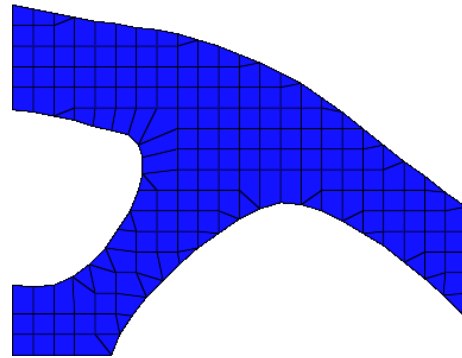
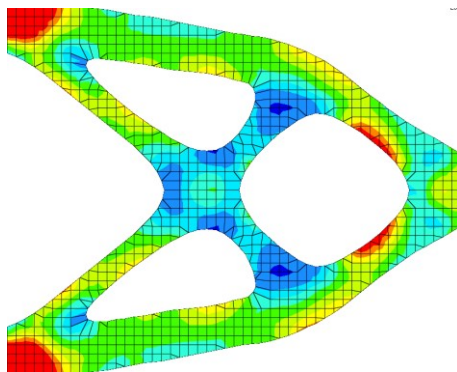
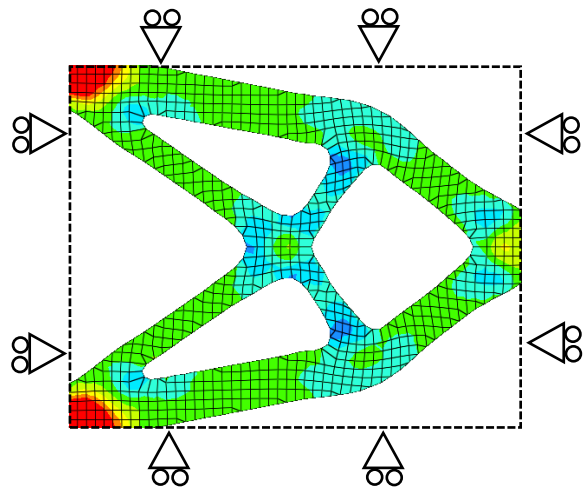


Fig.5.11 Boundary smoothing process



(a) Sensitivity distribution of the boundary
smoothing result



(b) Shape optimization result with full
sliding support

Fig.5.12 Obtained results of each process in the boundary shape identification method

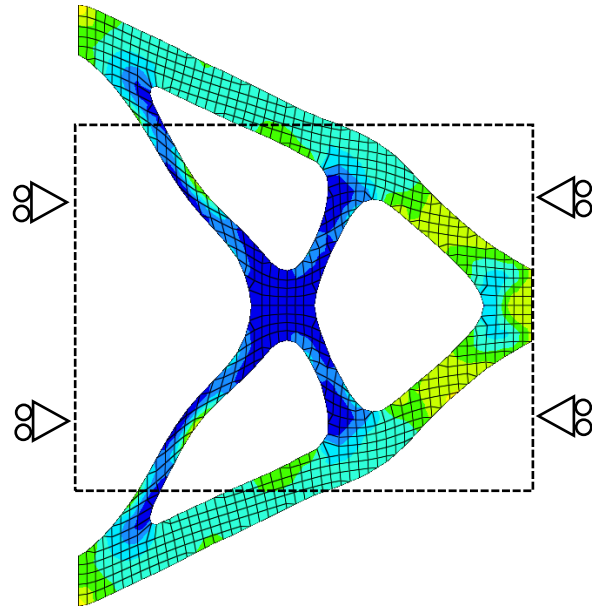


Fig.5.13 Shape optimization result without slide supports on upper and lower sides

行った．図 5.7(b)は，初期形状のトポロジー感度(ひずみエネルギー密度)分布である．荷重を加えた位置周辺と固定した左辺の上下端付近にのみ集中していることがわかり，大部分が遊んでいる状態である．図 5.8 は，本システムの有効性を示すため，感度フィルタリングを行わずに密度法に基づいてトポロジー最適化した結果の密度分布であり，一部を拡大してグレースケールを示した．黒い要素は等方性材料で満たされた部分を示し，白い要素は空隙で材料なしを示す．灰色の要素は密度範囲が $0 < \rho < 1$ のグレースケールの要素であり，チェッカーボードパターンも確認できる．これらのグレースケールは物理的な意味を持たず，製造工程で扱うことは困難である．図 5.9(a)は，設計変数に対し，しきい値を設け要素密度を 0 か 1 にした形状である．本研究では，グレースケールは全て要素密度を 1 とした．図 5.9(a), (b)は，ステップ 3 において式(5.13)，式(5.14)に従ってグレースケールやチェッカーボードパターンを解消した形状である．図 5.10 は式(5.15)，式(5.16)に従い，境界要素をトリミングした形状である．図 5.11 は境界平滑処理を行って最終的に得られた形状である．境界要素のトリミングにより形状の傾向が明確になり，境界平滑処理を行うことで元の形状の特徴を残しつつ滑らかな形状が得られた．図 5.12(a)は境界平滑処理の結果，図 5.12(b)

は H^1 勾配法に基づいて得られた最適形状である．本研究において設計領域は初期形状の物体領域と同じ領域としているため，図 5.13 のように設計領域の境界の一部に対し拘束を設けない場合，設計領域外まで変形してしまう場合がある．そのため，図 5.12(b)のように形状最適化ステップにおける速度場解析ではすべての境界に滑り支持を与えている．なお，図 5.7, 5.12, 5.13 において色の分布は形状感度となる形状勾配関数(ひずみエネルギー密度)の分布であり，色分布のコンターはすべて同じ範囲の値にされている．形状最適化プロセスを経て，最終形状の境界は形状勾配関数を反映した形状となっており，明確で滑らかな境界であることが確認できる．

次に，図 5.7(a)のモデルの要素分割数を 3 段階に分けて同じ条件で数値計算を行った結果を図 5.14 に示す．それぞれの分割数は，少ない順に縦横 40:50, 80:100, 160:200 である．ど

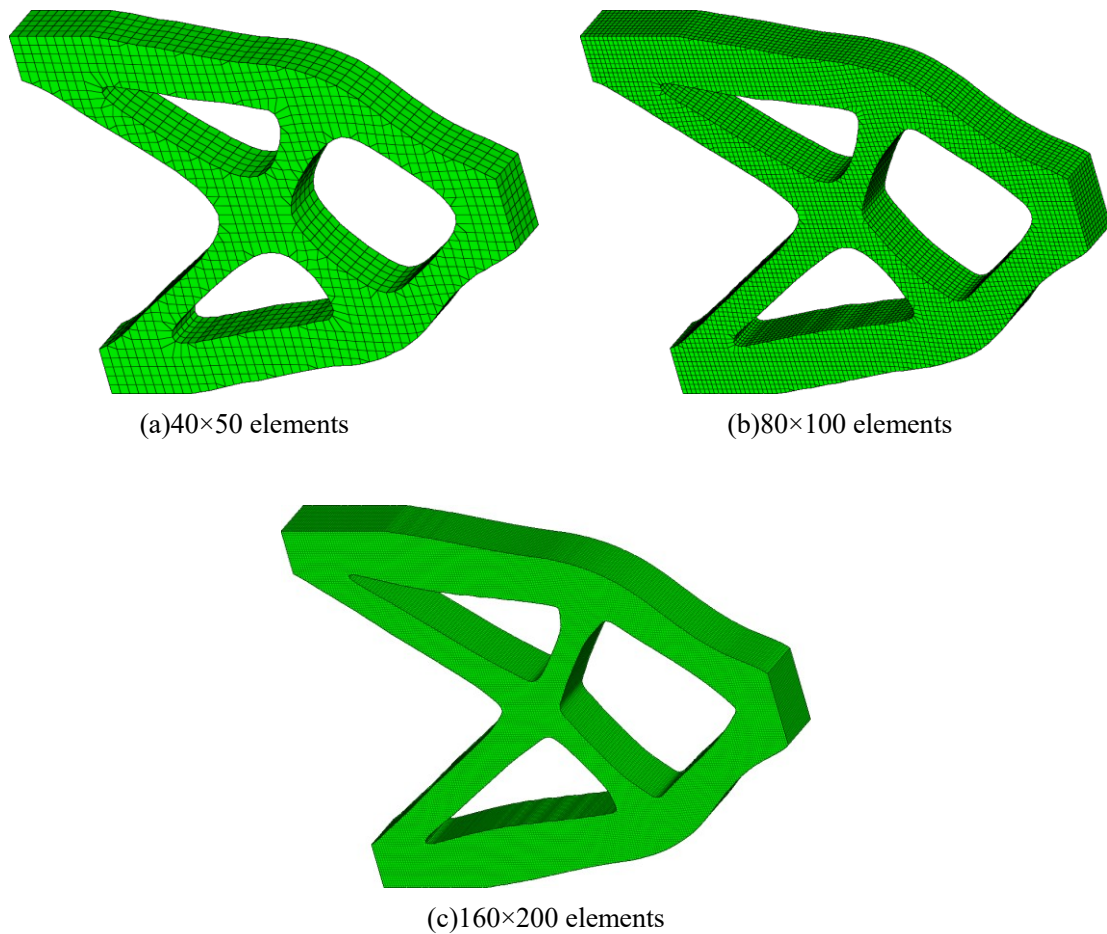


Fig.5.14 Optimal configurations with different mesh size

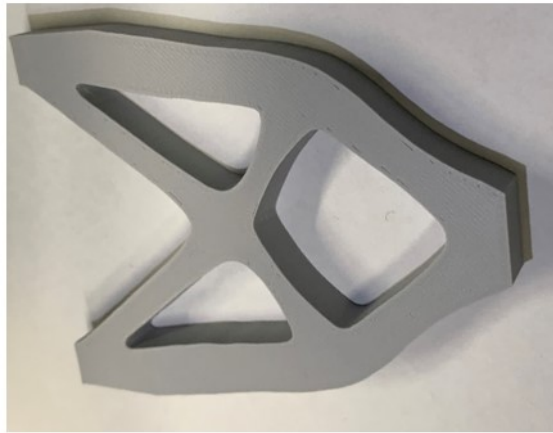


Fig.5.15 Manufactured model with 3D printer

のメッシュサイズであってもジグザグな形状がなくなり，平滑な形状が得られ，形状に大きな差は認められなかったためメッシュサイズによる影響は少ないことがわかる．

最後に，本計算例で得られたモデルを STL ファイルに変換し，市販の熱溶解積層方式 (FDM 方式) の 3D プリンターで直接製作を行った．これにより，本システムによって得られたモデルは，明確で滑らかな境界を持ち，図 5.15 に示すように 3D プリンターでの実際の製造工程に適用できることが確認できた．

5.7.2 計算例 2

図 5.16 に示す 3 つの正方形で構成される L 字の設計領域に対し，上辺を完全固定，右端上部に下向き荷重を加えたモデルを用いて検討を行った．体積制約値を初期形状の 50% としたとき，初期形状と本手法に適用して得られた最終形状をそれぞれ図 5.17(a) と図 5.17(b) に示す．なお，色の分布はトポロジー感度または形状感度となるひずみエネルギー密度の分布である．初期形状では上部のブロックの左右辺，特に右辺の下角部分と荷重点付近にのみ集中していることがわかる．最終形状では図 5.17(b) に示すように，ひずみエネルギー密度の分布が分散され，弧状部分の密度が高いことから，骨組み構造のような形態を創出することにより力の伝達方向を軸方向に誘導し，軸方向力によって抵抗することで剛性が高くなっ

ているものと考えられる。さらに、体積制約値を変更し、初期形状の 40%としたときの結果を図 5.18 に示す。体積制約値 50%に比べ、荷重を主に受けると考えられるアーチ型の部分の太さはあまり変わらず、その他の部分の体積が主に減少していることがわかる。このため、ひずみエネルギー密度の分布がより均一化された結果が得られたと考えられる。得られた結果に対して性能の評価を行うために、下式のようにパフォーマンス評価関数 (Performance Evaluation Function, PEF)を定義した。

$$PEF = CV \quad (5.23)$$

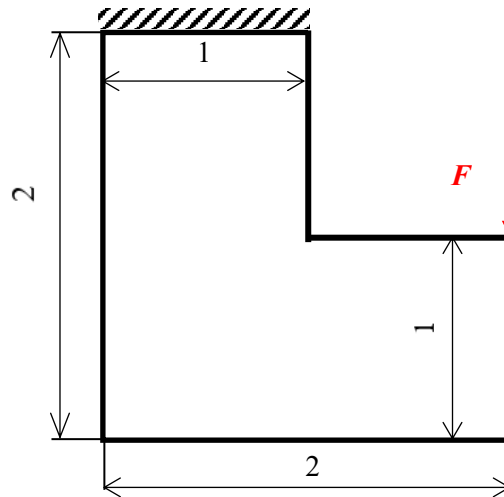


Fig.5.16 Design domain and boundary conditions of a L-shaped model

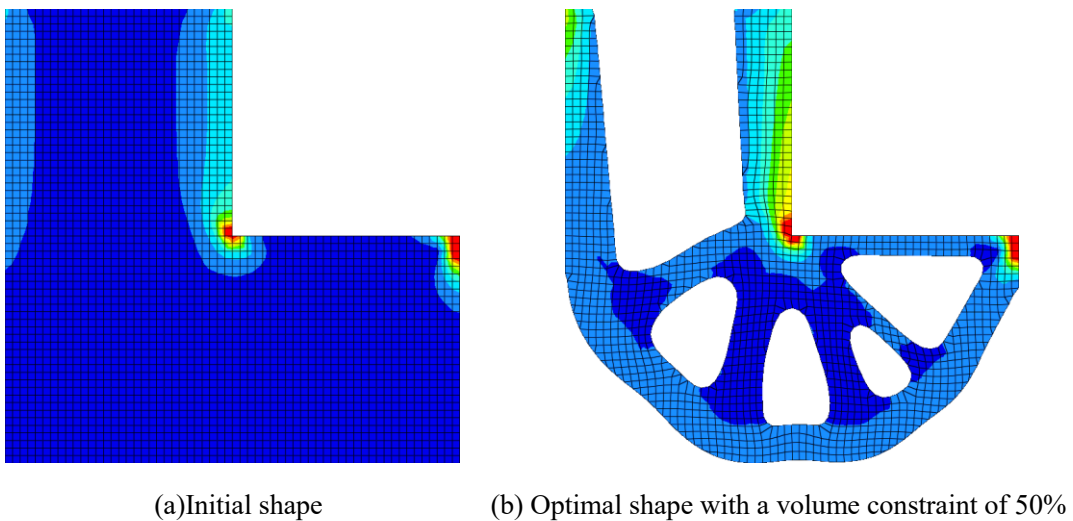


Fig.5.17 Distribution of sensitivity of initial shape and optimum shapes

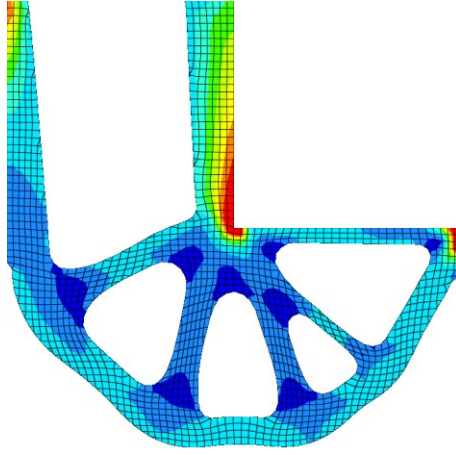


Fig.5.18 Distribution of sensitivity of optimal shape with a volume constraint of 40%

ここで、 C は平均コンプライアンス、 V は構造体の体積である．なお、この関数は小さいほど良いパフォーマンスを発揮する．式(5.23)で定義した各体積制約値のパフォーマンス評価関数と体積の履歴曲線を図 5.19 に示す．境界平滑化を行った直後、いずれのグラフにおいても体積の増加に伴い、パフォーマンス評価関数の低下が見られたが、形状最適化プロセスにより体積制約が満たされるにつれ、パフォーマンス評価関数が元に戻り収束していることがわかる．

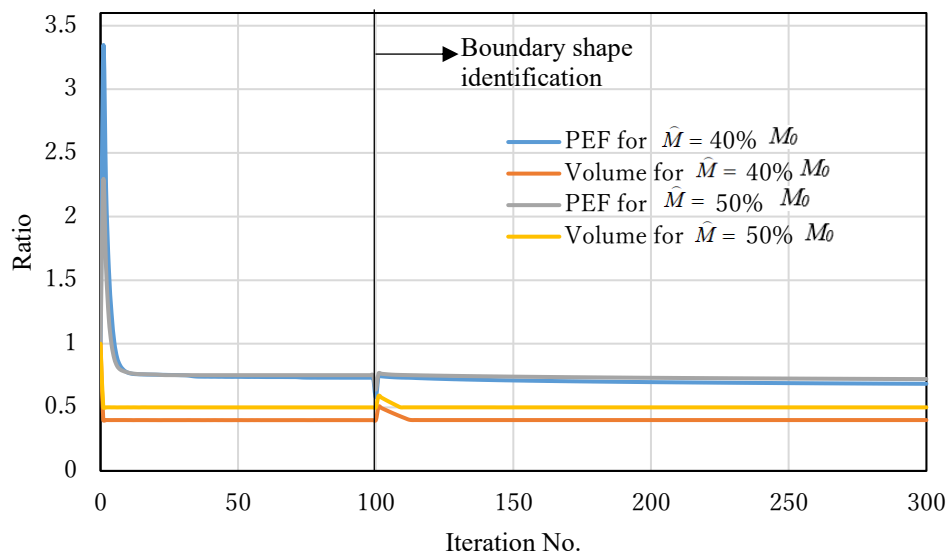
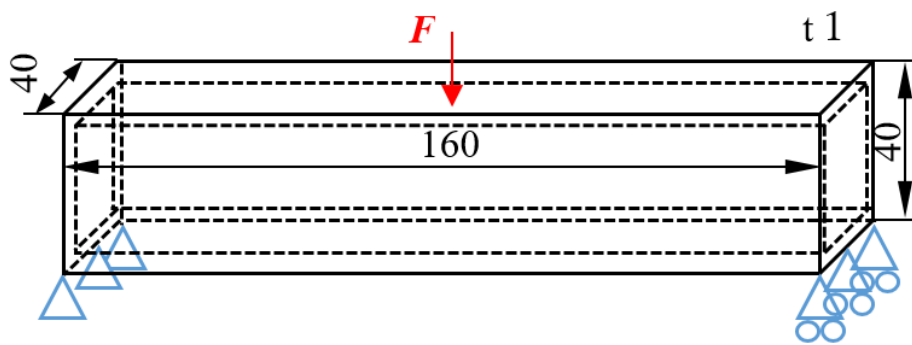


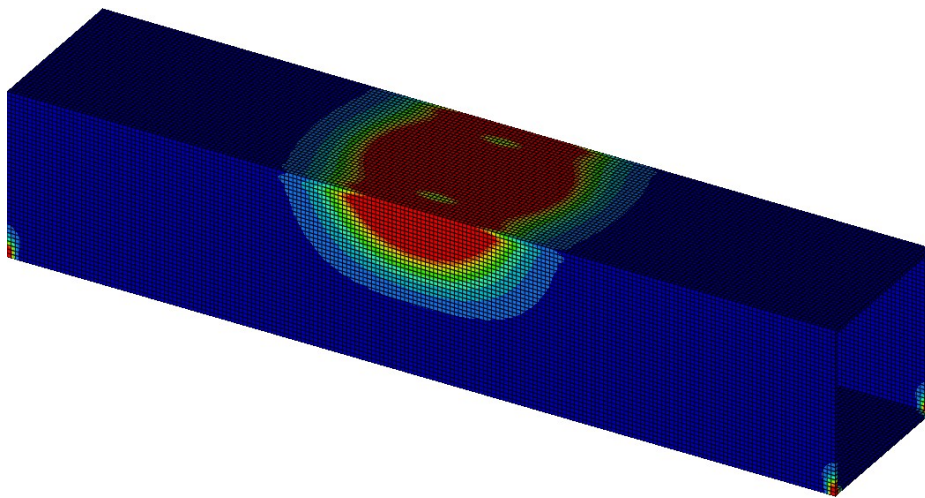
Fig.5.19 Iteration histories of design problem 2

5.7.3 計算例 3

図 5.20(a)に示すように正方形角パイプ状の設計領域に対し，両端支持，天板中央に下向き荷重を加えたモデルを用いて検討を行った．初期形状のひずみエネルギー密度の分布を図 5.20(b)に示す．図 5.21 は体積制約値を初期形状の 40%とし，面内方向のみの最適化計算を行った結果から得られた最適形状のひずみエネルギー密度の分布図である．初期形状では荷重点周辺と支持点付近にのみ集中していることがわかるが，最適形状ではひずみエネルギー密度の分布が分散され，アーチ状の部分やアーチを支える柱のような部分のひずみエネルギー密度が高いことから，骨組み構造のような形態を創出することにより力の伝達方向を軸方向に誘導し，軸方向力によって抵抗することで剛性が高くなっているものと考え



(a) Boundary conditions and design domain



(b) Distribution of the topological sensitivity

Fig.5.20 Initial shape of a square pipe model

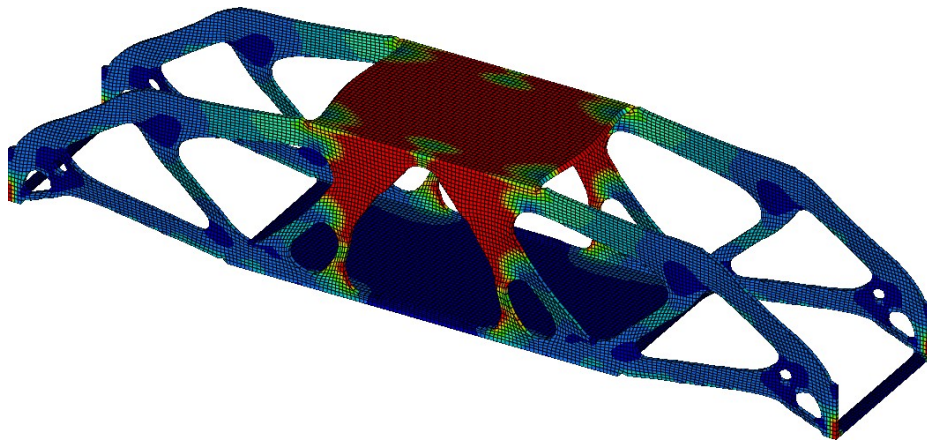


Fig.5.21 Sensitivity distribution of optimal shape

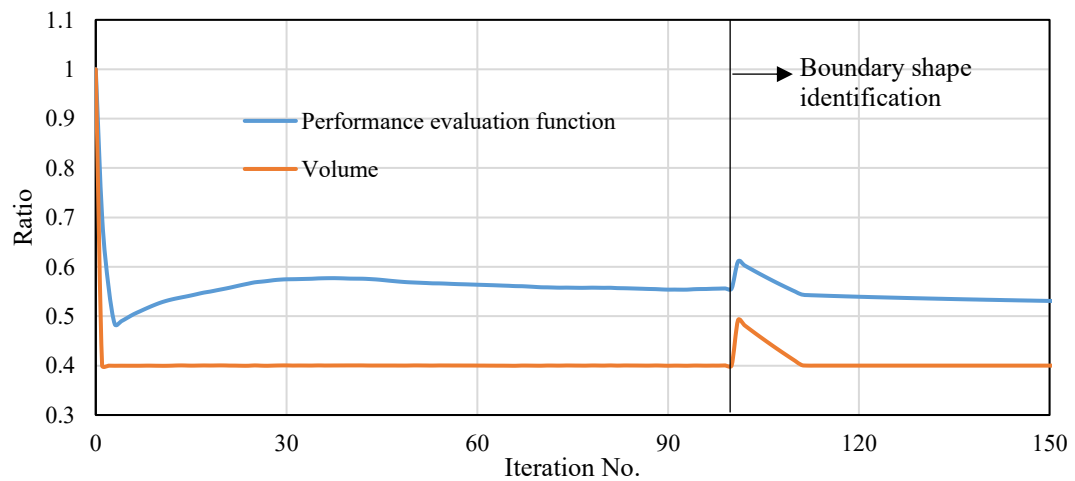


Fig.5.22 Iteration histories of design problem 3

えられる。荷重点の下や支持部の板のような部分はあまりひずみエネルギー密度が高いようには見られないが、パイプの内側の角部分では少し高いため、荷重によるモデル下部の奥行き方向への引張に耐えるのに必要であると考えられる。また、下部中央の板状部分においては体積制約値の関係上大きく残ってしまったものであると考えられる。図 5.22 に体積とコンプライアンスの積であるパフォーマンス評価関数の履歴曲線を示すが、境界平滑処理の直後を除き評価関数がほぼ一定の値を示している。計算例 2 の図 5.19 にも同様の傾向が現われているが、トポロジー最適化結果に対して境界平滑化処理を行った後、体積制約を満たせば、パフォーマンス評価関数が少なくとも平滑化処理直前の水準を維持することが可

能であることがわかる。これは、トポロジー最適化の結果得られた形状の境界形状の特定の
みを目的とし、評価関数をトポロジー最適化の結果よりさらに低い値を追求しない場合、形
状最適化プロセスにおける体積制約以外の感度を求める必要性がなくなり、剛性以外の問
題にも本手法の適用が可能であることを示唆している。

5.8 本手法の利点

本手法は、境界平滑化のための自動処理プロセスと H^1 勾配法を用いた形状最適化手法に
基づいており、パラメータの事前設定を必要としないパラメータフリー手法である。本手法
の有効性と実用性が 5.7 節の計算例を通じて検証され、主な利点は以下となる。

- ・ 境界平滑処理の各プロセスは簡単な差分式で示され、高い計算コストを必要としない。
- ・ 汎用 FEM コードと組み合わせた自動化システムに実装できるため、大規模な設計問題
への適用も可能となり、実設計に対し有効性と実用性を有する。
- ・ 本手法で得られた結果を STL モデルに変換することにより、市販の 3D プリンターで
直接製造できる。

今後は、本手法の汎用性を確認するため、剛性問題の他、振動、座屈、強度、熱伝導など
の問題への適用を進めていくことが重要である。

参考文献

- (1) 畔上秀幸, 領域最適化問題の一解法, 日本機械学会論文集 A 編, Vol.60, No.574(1994),
pp.1479-1486.
- (2) 西脇眞二, 泉井一浩, 菊池昇, トポロジー最適化, 丸善出版 (2013), pp.62.
- (3) Zienkiewicz, O.C. and Campbell, J.S., Shape optimization and sequential linear programming,
Optimum Structural Design- Theory and Applications, John Wiley & S Sons, (1973), pp.109-126.
- (4) 下田昌利, 畔上秀幸, 井原久, 桜井俊明, 複数荷重を考慮した弾性体の形状最適化(力法
による体積最小設計), 日本機械学会論文集 A 編, Vol.61, No.587 (1995), pp.1545-1552.

第6章 結論

本論文では、弾性・弾塑性挙動を考慮した密度変動型トポロジー最適化システムの構築を行い、トポロジー最適化結果に基づいた機械的特性の不明瞭さを含まない構造の創成を行った。以下、各章について結論をまとめる。

第1章では、構造最適化の分類および特徴について述べ、弾塑性を考慮する構造最適化問題は現在までの研究でほとんど取り扱われていないことについて言及した。また、トポロジー最適化の結果を実設計に流用するためには物体領域と非物体領域の境界を明確にしなければならないが、それに対してこれまで行われてきた研究について述べ、そのほとんどがパラメトリック手法であることに言及した。

第2章では、弾性構造体を対象としたトポロジー最適化の概要について述べ、本研究で適用する密度法に基づくトポロジー最適化の理論を詳細に説明し、その理論を基にトポロジー最適化システムの構築を行った。

第3章では、弾塑性構造体を対象としたトポロジー最適化問題の例として、低降伏点鋼せん断型パネルダンパーの変形能力の最大化、すなわち最大累積相当塑性ひずみ最小化問題を取り上げ、繰り返し弾塑性を考慮したトポロジー最適化システムの構築を行った。その際、局所測度のミニマックス問題には最大測度の局所性により飛び移りの可能性があるため、KS関数を導入し、領域変動に対して微分不可能を回避した。その結果、体積制約の下低降伏点鋼せん断型パネルダンパーに必要とされる変形能力の指標である最大累積相当塑性ひずみの最小化を達成し本手法の妥当性が確認できた。また、最大累積相当塑性ひずみと体積の相関を明らかにした。

第4章では、第3章で得られたせん断型パネルダンパーのトポロジー最適化結果を参考に形状のパラメータ化を行い、実験計画法を用いた応答曲面法に基づいてエネルギー吸収量の制約の下、パラメトリック手法によるせん断型パネルダンパーの形状最適化を行った。その結果、せん断型パネルダンパーの変形能力の向上が認められるとともに、機械的特性がはっきりした形状を得ることができた。しかし、パラメトリック手法ではパラメータの依存

性が高く、トポロジー最適化の結果との差異が見られた。また、パラメータ化プロセスが含まれることから属人化が認められるため、経験や勘に頼らないノンパラメトリック手法が必要であると考えられる。

第 5 章では、密度法に基づくトポロジー最適化によって得られた結果を基にパラメータ化プロセスを含まないトポロジー最適化結果の境界特定手法を提案し、この手法を用いてノンパラメトリックの境界特定手法のシステムを構築した。いくつかの数値例を通して本システムの有効性と実用性が検証され、トポロジー最適化結果に基づいた滑らかな境界を持つ構造の創成ができた。検証の際、メッシュサイズによる影響は少なく、荒いメッシュであっても細かいメッシュと同様の滑らかな境界を得られることがわかった。また、得られた結果を STL モデルに変換して、市販の熱溶解積層方式(FDM 方式)の 3D プリンターで製造できることも確認できた。本手法の境界平滑処理の各プロセスは簡単な差分式で示され、汎用 FEM コードと組み合わせた自動化システムに実装できる。このため、剛性問題のほか、振動、座屈、強度、熱伝導などの問題にも適応が可能であると考えられる。今後は、本手法の汎用性を確認するため、そのような問題への適用を進めていくことが重要である。

謝辞

本論文の作成を行うにあたり，いつも気にかけて下さった小野 長門教授，なかなか結果の出ない解析を最後まで温かく見守り，適切な指導を賜った指導教官の劉 陽准教授をはじめ，副査としてご指導ご鞭撻賜った片山 拓朗教授，平 雄一郎教授，機械工学科の皆様には筆舌に尽くしがたいほどの感謝を感じております．また，劉研究室の学生のご協力に心より感謝申し上げます．皆様の協力があつてこそ擱筆することができました．この場をお借りし，厚く御礼を申し上げますと共に謝辞と代えさせていただきます．