崇城大学　紀要
第38巻　平成25年３月

ベーシック森田同値の局所構造に関する注意 I

河合　浩明 *

Remarks on the Local Structure of Basic Morita Equivalences I

by

Hiroaki KAWAI

要　旨

[9] において、L. Puig はベーシック森田同値の概念を導入して加群 M がブロック多元環 A と A' の間のベーシック森田同値を導くとき、A と A' に対応する局所ブロック多元環 $A(\delta)$ と $A'(\delta')$ の間のベーシック森田同値を導く加群 $M(\delta,\delta')$ が存在することを示した。しかし、M と $M(\delta,\delta')$ の間の明確な関係は与えられていない。この論文と [2] の目的は、M と $M(\delta,\delta')$ の間の関係について考察することである。この論文では、この考察のための基本となる定理（定理 3.3.1、定理 4.2.7）を与える。[2] では、これらの定理を用いていくつかの設定のもとで具体的な結果を与える。

Key Words : Finite group, Block, Pointed group, Interior algebra, Basic Morita equivalence

1. はじめに

ブロックとその局所構造に関する基本理論は R. Brauer により築かれた。Brauer 理論は指標理論にもとづくものであったが、その後の J. L. Alperin、M. Broué、L. Puig による Brauer 圏と局所圏の概念の導入を経て，ブロックとその局所構造に関する研究は圏理論にもとづくものとなった。その代表的なものとして、J. Rickard は対称多元環の導来圏に対する森田理論の構築 [10] (この導来同値は Rickard 同値と呼ばれる) に続いて発表した論文 [11] において splendid 同値と呼ばれる概念を導入した。

G、G' を有限群、A_0、A'_0 をそれぞれの主ブロック多元環とする。[11、定理 4.1] において、J. Rickard は A_0、A'_0 が同じ不足群 P をもち Brauer 圏が同値という設定のもとで (正確には、これは [4、定理 1.1] の設定)、彼の用語で splendid tilting complex と呼ばれるチェイン複体 X が A_0 と A'_0 の間の Rickard 同値を導くと仮定するとき、任意の $1 \neq Q \leq P$ に対して、$C_G(Q)$ と $C_{G'}(Q)$ の主ブロック多元環の間の Rickard 同値を導く X から導かれるチェイン複体 $X(\triangle Q)$ の直和因子が存在することを示した。 一方、M. Linckelmann は [4、定理 1.1] において、上記のチェイン複体 X に対しさらに条件を付け加えることにより、主ブロックに対する上記の結果を任意のブロックの場合まで拡張した。その後、L. Puig は [9] においてベーシック森田同値、ベーシック Rickard 同値と呼ばれる概念を導入して、[4]、[11] とはまったく異なる方法により [4]、[11] の結果の大幅な改良となる結果 [9, 定理 19.11] を与えた。

この主定理 [9, 定理 19.11] に至るまでの Puig の議論の進め方は、最初にベーシック森田（安定）同値 (4.1 節、参照) に対して、[9、定理 6.9]（3.2 節の定理 3.2.1、参照）をもとに主定理の類似結果 [9、7.7.4] が成り立つことを示している。その後，基礎環 $\mathcal{O}$ (完備離散付値環で剰余体が標数 p の代数的閉体) を differential $\mathbf{Z}$-grading $\mathcal{O}$-algebra に拡張

* 崇城大学工学部総合教育教授

することにより ベーシック Rickard 同値に対する主定理を導いており、主定理の証明の本質的なアイデアは ベーシック 森田同値の場合に表れていると言ってよい。

上に記したように、[4]、[11] においては G、G' のブロック多元環 A、A' の間の Rickard 同値を導くチェイン複体を用いて，$C_G(Q)$, $C_{G'}(Q)$ の対応するブロック多元環の間の Rickard 同値を導くチェイン複体が直接与えられている。一方、[9] においてはベーシック Rickard 同値を導くチェイン複体の間の関係は明確にされていない。この論文と [2] の目的は、G、G' のブロック多元環 A、A' の間のベーシック森田同値を導く加群と $C_G(Q), C_{G'}(Q)$ の対応するブロック多元環の間のベーシック森田同値を導く加群の間の関係について考察することである。

この論文と [2] は本来は 1 つの論文であるが、崇城大学紀要投稿規程第 6 条 (原稿の分量) に従って 2 つの論文に分けて投稿する。この論文では、上記考察のための基本定理（定理 3.3.1、定理 4.2.7）を与える。[2] では、この基本定理を用いて、いくつかの設定のもとで上記問題に対する結果を与える。

2. 基本概念と用語

この論文を通して、p は素数、k は標数 p の代数的閉体そして $\mathcal{O}$ は完備な離散付値環で、その剰余体 $\mathcal{O}/\mathcal{P}$ が k となるものとする（$\mathcal{P}=0$ のときは $\mathcal{O}=k$)。全ての $\mathcal{O}$-加群（$\mathcal{O}$-多元環は $\mathcal{O}$-加群として）は有限生成とする。また、$\mathcal{O}$-多元環 A に対して、A-加群は左 A-加群を意味する。この章では、この論文と [2] に用いる基本概念と用語を説明する。この章で取り上げていないブロック理論におけるその他の基本概念と用語については、[6] と [12] を参照。

2.1 G-多元環と $\mathcal{O}G$-インテリア多元環

A を $\mathcal{O}$-多元環、G を有限群とする。<u>G-多元環</u> A は群準同型 $f: G \to \mathrm{Aut}(A)$（ここで、$\mathrm{Aut}(A)$ は A の自己同型群）によって与えられる作用を持った $\mathcal{O}$-多元環である。すなわち、$x \in G$ の $a \in A$ への作用は $a^x = f(x^{-1})(a)$ で与えられる。一方、$A^\times$ を A の可逆元から成る乗法群とすると、<u>$\mathcal{O}G$-インテリア多元環</u> A（この用語は [9] に従う）は群準同型 $h: G \to A^\times$ によって与えられる両側からの作用を持った $\mathcal{O}$-多元環である。すなわち、$x \in G$ の $a \in A$ への作用は $x \cdot a = h(x)a$、$a \cdot x = ah(x)$ で与えられる（以後 $\cdot$ は省略)。群準同型 $A^\times \to \mathrm{Aut}(A)$ を通して $\mathcal{O}G$-インテリア多元環は G-多元環となる、すなわち、$x \in G$ の $a \in A$ への G-多元環としての作用は $a^x = x^{-1}ax$ で与えられる。

G の部分群 H と G-多元環 A に対して、A^H は H の作用による固定元からなる $N_G(H)$-多元環を表す（A が $\mathcal{O}G$-インテリア多元環のときは、A^H は $\mathcal{O}C_G(H)$-インテリア多元環となる)。また、H の部分群 K に対して、<u>相対トレース写像</u> Tr_K^H を次で定める。

$$(2.1.1)\qquad \mathrm{Tr}_K^H : A^K \to A^H, \quad a \mapsto \sum_{x \in [H/K]} a^{x^{-1}}$$

ここで、$[H/K]$ は H の K による剰余類の代表系である。$A_K^H = \mathrm{Tr}_K^H(A^K)$ とすると、G の p-部分群 P に対して、<u>Brauer 商環</u> $A(P)$ を次で定める。

$$(2.1.2)\qquad A(P) = A^P/(\sum_{Q \lneq P} A_Q^P + \mathcal{P}A^P)$$

ここで、和は P の部分群 $Q \neq P$ の全てにわたってとる。また、A^P から $A(P)$ への商写像を <u>Brauer 準同型</u> という。

$$(2.1.3)\qquad \mathrm{Br}_P : A^P \to A(P)$$

さらに、P に関する Brauer 準同型であることが明らかな場合は、$\mathrm{Br}_P(a)$（$a \in A^P$）を $\bar{a}$ で表す。$\mathcal{O}G$-加群に対しても式 (2.1.1)、(2.1.2)、(2.1.3) は意味をもつ。そこで、加群に対してこれらの概念を用いるとき、多元環の場合と同じ記号を用いることにする。

M を $\mathcal{O}G$-加群とする。M が G-不変な $\mathcal{O}$-基底 V（すなわち、任意の $x \in G$ に対して、$xV = V$）を持つとき、M を <u>置換 $\mathcal{O}G$-加群</u> という。また、G の任意の p-部分群 Q に対して、作用を G から Q へ制限して得られる $\mathrm{Res}_Q^G(M)$ が置換 $\mathcal{O}Q$-

加群となるとき、M を p-置換加群という。P を p-群とする。$\mathcal{O}P$-加群 M に対して、$\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(M)$ が P の共役作用により置換 $\mathcal{O}P$-加群となり、さらに $\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(M)(P) \neq 0$ が成り立つとき、$\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(M)$ を Dade P-多元環と呼ぶ。

G-多元環 A、B に対して、G-多元環準同型 $\psi : A \to B$ は $\psi(a^x) = \psi(a)^x$（ここで、$x \in G$、$a \in A$）を満たす $\mathcal{O}$-多元環準同型である。一方、$\mathcal{O}G$-インテリア多元環 A、B に対して、$\mathcal{O}G$-インテリア多元環準同型 $\psi : A \to B$ は $\psi(xa) = x\psi(a)$ と $\psi(ax) = \psi(a)x$ を満たす $\mathcal{O}$-多元環準同型である。G-多元環準同型（または、$\mathcal{O}G$-インテリア多元環準同型）ψ が次の条件を満たすとき、ψ を埋め込みと呼ぶ。

(2.1.4) $\mathrm{Ker}(\psi) = 0,\ \ \psi(A) = \psi(1_A)B\psi(1_A)$

ここで、$\mathrm{Ker}(\psi)$ は ψ の核、1_A は A の単位元である。[12] では exomorphism と呼ばれる G-多元環準同型の同値類に対して埋め込みが定義されているが、この論文では exomorphism の概念は用いない。自明な埋め込み写像に対しては $\hookrightarrow$ を用る（また、埋め込みとならない包含写像も同じ記号を用いる)。さらに、$\mathcal{O}$-基底をもつ $\mathcal{O}G$-インテリア多元環 A、B に対して、$\mathcal{O}G$-インテリア多元環準同型 $\psi : A \to B$ が次の条件を満たすとき、ψ を安定埋め込みと呼ぶ（[9] の 6.4 節、参照)。

(2.1.5)
$\mathrm{Ker}(\psi)$ と $\psi(1_A)B\psi(1_A)/\psi(A)$ が $\mathcal{O}G$-両側加群として射影的である。

H を G の部分群、B を $\mathcal{O}H$-インテリア多元環とする。このとき、$\mathcal{O}G$-インテリア多元環 $\mathrm{Ind}_H^G(B)$ を次のように定義する（[12] の 16 節、参照)。

(2.1.6) $\quad \mathrm{Ind}_H^G(B) = \mathcal{O}G \otimes_{\mathcal{O}H} B \otimes_{\mathcal{O}H} \mathcal{O}G$

x、x'、y、$y' \in G$ と b、$b' \in B$ に対して、積を次で定める。

(2.1.7)
$$(x \otimes b \otimes y)(x' \otimes b' \otimes y') = \begin{cases} x \otimes byx'b' \otimes y' & \text{if } yx' \in H \\ 0 & \text{if } yx' \notin H \end{cases}$$

構造写像は次で定める。

(2.1.8)
$$G \to \mathrm{Ind}_H^G(B), \quad x \mapsto \sum_{y \in [G/H]} xy \otimes 1_B \otimes y^{-1}$$

ここで、1_B は B の単位元である。さらに、$\mathcal{O}G$-インテリア多元環 A と群準同型 $\sigma : G \to G'$ に対して、σ の核を K とすると $(\mathcal{O} \otimes_{\mathcal{O}K} A)^K$ は $\mathcal{O}\sigma(G)$-インテリア多元環となり、次の $\mathcal{O}G'$-インテリア多元環が得られる（[9] の 3.2 節、参照)。

(2.1.9) $\quad \mathrm{Ind}_\sigma(A) = \mathrm{Ind}_{\sigma(G)}^{G'}((\mathcal{O} \otimes_{\mathcal{O}K} A)^K)$

また、$\mathcal{O}G'$-インテリア多元環 A' に対して、$\mathrm{Res}_\sigma A'$ は σ を通して与えられる G の作用をもった $\mathcal{O}G$-インテリア多元環を表す。

2.2 ポイント付き部分群と Higman 埋め込み

A を G-多元環とする。A 上のポイント付き部分群 H_δ は G の部分群 H と A^H における原始べき等元の共役類 δ から成る組ことである。また、δ を A 上 H のポイントという。G の p-部分群 P についてのポイント付き部分群 P_γ が条件 $\mathrm{Br}_P(\gamma) \neq 0$ を満たすとき、P_γ を局所ポイント付き部分群と呼ぶ。さらに、A 上のポイント付き部分群 H_δ に対して、P_γ が H_δ に含まれる局所ポイント付き部分群のうち極大であるとき、P_γ を H_δ のポイント付き不足群と呼ぶ（包含関係 $P_\gamma \subset H_\delta$ については、[12] の 13 節を参照)。

A 上のポイント付き部分群 H_δ と i、$j \in \delta$ に対して、iAi、jAj は H-多元環であり、H-多元環として同型である。iAi $(i \in \delta)$ を任意に 1 つ選んで A_δ と表し、A の H_δ に関する局所化という（A が $\mathcal{O}G$-インテリア多元環のときは、A_δ は $\mathcal{O}H$-インテリア多元環となる)。また、A 上 P_γ が H_δ のポイント付き不足群であるとき、A_γ を A_δ のソース多元環と呼ぶ。

A を $\mathcal{O}G$-インテリア多元環、H_δ と K_ϵ を $K_\epsilon \subset H_\delta$ を満たす A 上のポイント付き部分群とする。このとき、$\delta \subset \mathrm{Tr}_K^H(A^K \epsilon A^K)$ が成り立つための必要十分条件は、次の図式が可換となるような $\mathcal{O}H$-インテリア多元環としての埋め込み $\theta : A_\delta \to \mathrm{Ind}_K^H(A_\epsilon)$ が存在することである。さらに、この場合 θ は一

意的に定まる。

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Res}^H_K(A_\delta) \arrow[r, "\mathrm{Res}^H_K(\theta)"] & \mathrm{Res}^H_K(\mathrm{Ind}^H_K(A_\epsilon)) \\
A_\epsilon \arrow[u, hook] \arrow[ur, "\mathcal{D}"'] &
\end{tikzcd}$$

図式-2.2.1

ここで、$\mathcal{D}$ は標準的な埋め込み、記号が付いていない写像は包含写像、Res^H_K は作用の H から K への制限を表す（[12、定理 17.9] 参照)。Puig [9] に従って θ を H_δ と K_ϵ に関する Higman 埋め込みと呼ぶ。特に、K_ϵ が H_δ のポイント付き不足群であるとき Higman 埋め込みが存在する（[12、定理 18.3] 参照)。

2.3 マルティプリシティー加群

有限群 G と $\mathcal{O}$ の乗法群 $\mathcal{O}^\times$ に対して、次の中心拡大が与えられたとする。

(2.3.1) $$1 \longrightarrow \mathcal{O}^\times \xrightarrow{\ \phi\ } \widehat{G} \xrightarrow{\ \pi\ } G \longrightarrow 1$$

ここで、$\widehat{G}$ は無限群、$\phi(\mathcal{O}^\times)$ は $\widehat{G}$ の中心に含まれる。このとき、次のように振れ型の群環 $\mathcal{O}_*\widehat{G}$ を定義する。

(2.3.2) $$\mathcal{O}_*\widehat{G} = \mathcal{O}\widehat{G}/I(\mathcal{O}^\times, G)$$

ここで、$\mathcal{O}\widehat{G}$ は $\widehat{G}$ の群環、$I(\mathcal{O}^\times, G)$ は $\phi(\lambda)-\lambda\cdot 1$（$\lambda \in \mathcal{O}^\times$）によって生成される両側イデアルである。$\sigma : G \to \widehat{G}$ を $\pi \circ \sigma = id_G$ を満たす写像とする。このとき、$\{\sigma(x) \mid x \in G\}$ は $\mathcal{O}_*\widehat{G}$ の $\mathcal{O}$-基底となる。さらに、G の $\mathcal{O}_*\widehat{G}$ への作用を $\sigma(x)$ による共役によって定義することにより、$\mathcal{O}_*\widehat{G}$ は G-多元環となる。

A を G-多元環、H_δ を A 上のポイント付き部分群とする。$\mathcal{M}_\delta$ を $\delta \not\subset \mathcal{M}_\delta$ を満たす A^H の極大両側イデアルとする。このとき、単純 k-多元環 $A^H/\mathcal{M}_\delta$ を H_δ のマルティプリシティー多元環といい、$A(H_\delta)$ で表す。さらに、単純多元環 $A(H_\delta)$ を $\mathrm{End}_k(V_A(H_\delta))$ と表すとき、単純 A^H-加群 $V_A(H_\delta)$ を H_δ の マルティプリシティー加群 と呼ぶ。

(2.3.3)
$$s_\delta : A^H \to A(H_\delta) = \mathrm{End}_k(V_A(H_\delta))$$

また、$x \in G$ について、$(H_\delta)^x = (H^x)_{\delta^x}$ である。この作用に関する H_δ の固定部分群を $N_G(H_\delta)$ で表す。さらに、$\bar{N}_G(H_\delta) = N_G(H_\delta)/H$ と置いて、群 $\hat{\bar{N}}_G(H_\delta)$ を次のように定める。

(2.3.4)
$$\hat{\bar{N}}_G(H_\delta) = \{(s_\delta(a), \bar{x}) \mid (a, \bar{x}) \in (A^H)^\times \times \bar{N}_G(H_\delta) \text{ such that } s_\delta(a^{-1}ba) = s_\delta(b^{\bar{x}}) \text{ for all } b \in A^H\}$$

このとき、次の中心拡大が得られる（[8] の 6.2 節 ; [12、例 10.8] 参照)。

(2.3.5) $$1 \to k^\times \to \hat{\bar{N}}_G(H_\delta) \to \bar{N}_G(H_\delta) \to 1$$

この中心拡大と対応する振れ型の群環 $k_*\hat{\bar{N}}_G(H_\delta)$ に対して、$k_*\hat{\bar{N}}_G(H_\delta)$ から $A(H_\delta)$ への多元環準同型を次のように定めることができる（[12、例 10.8] 参照)。最初に、$\hat{\bar{N}}_G(H_\delta)$ の定義より次の群準同型が得られる。

(2.3.6)
$$\varphi_\delta : \hat{\bar{N}}_G(H_\delta) \to A(H_\delta)^\times, \quad (s_\delta(a), \bar{x}) \mapsto s_\delta(a)$$

この群準同型を k 上線形に拡張した多元環準同型 $\hat{\varphi}_\delta : k\hat{\bar{N}}_G(H_\delta) \to A(H_\delta)$ に対して、式 (2.3.2) におけるイデアル $I(k^\times, \bar{N}_G(H_\delta))$ が $\hat{\varphi}_\delta$ の核に含まれることより、次の多元環準同型が得られる。

(2.3.7)
$$\bar{\varphi}_\delta : k_*\hat{\bar{N}}_G(H_\delta) \to A(H_\delta) = \mathrm{End}_k(V_A(H_\delta))$$

そこで、(2.3.7) を通して $V_A(H_\delta)$ を $k_*\hat{\bar{N}}_G(H_\delta)$ 上の加群と見なすとができる。

2.4 Puig 対応

A を G-多元環、P_γ を A 上のポイント付き部分群とする。$A(P_\gamma)$ を P_γ のマルティプリシティー多元環、$V_A(P_\gamma)$ を P_γ のマルティプリシティー加群、$s_\gamma : A^P \to A(P_\gamma)$ を商写像とする。2.3 節で示したように次の多元環準同型が得られる。

(2.4.1) $$\bar{\varphi}_\gamma : k_*\hat{\bar{N}}_G(P_\gamma) \to A(P_\gamma) = \mathrm{End}_k(V_A(P_\gamma))$$

次の定理で与えられる 1 対 1 対応のことを Puig 対応という（[8] の 6.4 節 ; [12、定理 19.1] 参照)。

定理 2.4.1 (Puig) P_γ を A 上の局所ポイント付き部分群とする。次の集合の間に 1 対 1 対応が存在

する。

$\mathcal{S}_1$: P_γ が G_α のポイント付き不足群となるような A 上 G のポイント α の集合。

$\mathcal{S}_2$: $k_*\hat{\bar{N}}_G(P_\gamma)$-加群 $V_A(P_\gamma)$ の射影直既約直和因子の同型類の集合（すなわち、$A(P_\gamma)^{\bar{N}_G(P_\gamma)}$ の射影ポイントの集合)。

対応は次で与えられる。

(2.4.2)

$\mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2, \quad \alpha \longmapsto \{V_{A_\alpha}(P_\gamma) = s_\gamma(w)V_A(P_\gamma)\}$

ここで、w は α に属するべき等元（取り方には依存しない)、右辺は $V_{A_\alpha}(P_\gamma)$ を含む同型類を表す。また、[12、命題 15.4] より $V_{A_\alpha}(P_\gamma)$ を $A(P_\gamma)$ で定まる $k_*\hat{\bar{N}}_G(P_\gamma)$ に関する加群とみなす。

定理 2.4.1 は Barker [1、定理 5.1] により次のように拡張された。ここでも、P_γ を A 上の局所ポイント付き部分群とする。

定理 2.4.2 (Barker) H_δ を次の条件を満たす A 上のポイント付き部分群とする。部分群 H は $N_G(P_\gamma) \leq N_G(H)$ を満たす。さらに、H_δ は P_γ をポイント付き不足群としてもつ。このとき、次の集合の間に 1 対 1 対応が存在する。

$\mathcal{S}'_1$: $H_\delta \subset G_\alpha$ であり、P_γ が G_α のポイント付き不足群となるような A 上 G のポイント α の集合。

$\mathcal{S}'_2$: $k_*\hat{\bar{N}}_G(H_\delta)$-加群 $V_A(H_\delta)$ の射影直既約直和因子の同型類の集合（すなわち、$A(H_\delta)^{\bar{N}_G(H_\delta)}$ の射影ポイントの集合)。

対応は次で与えられる。

(2.4.3)

$\mathcal{S}'_1 \to \mathcal{S}'_2$、$\alpha \longmapsto \{V_{A_\alpha}(H_\delta) = s_\delta(w)V_A(H_\delta)\}$

記号については定理 2.4.1 と同じ意味である。

2.5 補題

3 章の定理 3.3.1 の証明に用いる 2 つの補題をここで準備しておく。[9、6.4.2] より、安定埋め込みについて次の補題が得られる。

補題 2.5.1 A、B を $\mathcal{O}G$-インテリア多元環、H_δ を A 上の射影的でないポイント付き部分群とする。安定埋め込み $\psi : A \to B$ が与えられたとき、$\psi(\delta) \subset \hat{\delta} + B_1^H$ となる B 上 H の射影的でないポイント $\hat{\delta}$ がとれて、次の可換図式が得られる。

$$\begin{tikzcd}
A^H \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] & B^H \arrow[d] \\
A^H/A_1^H \arrow[r, "\hat{\psi}"] \arrow[d] & B^H/B_1^H \arrow[d] \\
A(H_\delta) \arrow[r, "\psi(H_\delta)"] & B(H_{\hat{\delta}})
\end{tikzcd}$$

図式-2.5.1

ここで、ψ から自然に導かれる $\bar{\psi}$ は $\mathcal{O}C_G(H)$-インテリア多元環としての埋め込みである。また、たて方向の写像の合成は (2.3.3) における商写像を与える。さらに、$\psi(H_\delta)$ は $kC_G(H)$-インテリア多元環としての埋め込みである。

G-多元環 A 上 P_γ が G_α のポイント付き不足群であるとき、$V_{A_\alpha}(P_\gamma)$ は $A(P_\gamma)$ で定まる $k_*\hat{\bar{N}}_G(P_\gamma)$ に関する加群として射影直既約である ([12、系 19.3] 参照)。

補題 2.5.2 2.3 節の記号のもとで、G_α と H_δ を $G_\alpha \supset H_\delta$ となる A 上のポイント付き部分群とする。さらに、$V_{A_\alpha}(H_\delta)$ は $A(H_\delta)$ で定まる $k_*\hat{\bar{N}}_G(H_\delta)$ に関する加群として射影直既約であると仮定する。e を $k_*\hat{\bar{N}}_G(H_\delta)$ の原始べき等元、j を $A(H_\delta)$ の原始べき等元、w を α に属するべき等元とする。このとき、j、w の取り方に依存せず、次の (i)、(ii) は同値である。

(i) $\quad V_{A_\alpha}(H_\delta) \cong k_*\hat{\bar{N}}_G(H_\delta)e$

(ii) $\quad \bar{\varphi}_\delta(e)s_\delta(w)A(H_\delta)j \not\subset \bar{\varphi}_\delta(J)s_\delta(w)A(H_\delta)j$

(ii) において、J は根基 $J(k_*\hat{\bar{N}}_G(H_\delta))$ を表す。また、$\bar{\varphi}_\delta(J)s_\delta(w)A(H_\delta)j = s_\delta(w)\bar{\varphi}_\delta(J)A(H_\delta)j$ が成り立つ。

[**証明**] $V_{A_\alpha}(H_\delta)$ が射影直既約 $k_*\hat{\bar{N}}_G(H_\delta)$-加群であることより $V_{A_\alpha}(H_\delta)$ は $k_*\hat{\bar{N}}_G(H_\delta)$ の原始べき等元 f を用いて次のように表される。

(2.5.1) $\quad V_{A_\alpha}(H_\delta) \cong k_*\hat{\bar{N}}_G(H_\delta)f$

一方、$V_A(H_\delta)$ は $A(H_\delta)$ の原始べき等元 j を任意

に 1 つとって、$V_A(H_\delta) = A(H_\delta)j$ と表すことができる（[12、補題 10.7] の証明を参照)。そこで、$k_*\hat{\bar{N}}_G(H_\delta)$-加群としての次の同型が得られる。

(2.5.2)　$V_{A_\alpha}(H_\delta) \cong s_\delta(w)V_A(H_\delta) \cong s_\delta(w)A(H_\delta)j$

同型 (2.5.1) と (2.5.2) より、次の $k_*\hat{\bar{N}}_G(H_\delta)$-単純加群の間の同型が得られる。

(2.5.3)

$$k_*\hat{\bar{N}}_G(H_\delta)f/Jf \cong s_\delta(w)A(H_\delta)j/\bar{\varphi}_\delta(J)s_\delta(w)A(H_\delta)j$$

同型 (2.5.3) と [12、命題 1.15 と命題 5.1] より、次の同値が得られる。

(2.5.4)

$$\begin{aligned} & k_*\hat{\bar{N}}_G(H_\delta)f \cong k_*\hat{\bar{N}}_G(H_\delta)e \\ \Longleftrightarrow \quad & k_*\hat{\bar{N}}_G(H_\delta)f/Jf \cong k_*\hat{\bar{N}}_G(H_\delta)e/Je \\ \Longleftrightarrow \quad & e\Big(s_\delta(w)A(H_\delta)j/\bar{\varphi}_\delta(J)s_\delta(w)A(H_\delta)j\Big) \neq \bar{0} \\ \Longleftrightarrow \quad & \bar{\varphi}_\delta(e)s_\delta(w)A(H_\delta)j \not\subset \bar{\varphi}_\delta(J)s_\delta(w)A(H_\delta)j \end{aligned}$$

さらに、$w \in A^G$ より $s_\delta(w) \in A(H_\delta)^{\bar{N}_G(H_\delta)}$ であるから $\bar{\varphi}_\delta$ と $\hat{\bar{N}}_G(H_\delta)$ の定義より $\bar{\varphi}_\delta(J)s_\delta(w)A(H_\delta)j = s_\delta(w)\bar{\varphi}_\delta(J)A(H_\delta)j$ となることが分かる。 □

3. 森田安定同値

3.1 この章のための準備

G と G' を有限群、b と b' をそれぞれ G と G' のブロックとする。また、ブロック多元環を $A = \mathcal{O}Gb$、$A' = \mathcal{O}G'b'$ とおく。M を直既約 A-A'-両側加群とし、M は左 A-加群、右 A'-加群として射影的と仮定する。このとき、M が A と A' の間の 森田同値（すなわち、A-加群の圏と A'-加群の圏の同値）を導くための必要十分条件は、A-A-両側加群として $M \otimes_{A'} M^* \cong A$、さらに、$A'$-$A'$-両側加群として $M^* \otimes_A M \cong A'$ が成り立つことである（[3] の 9 章、参照)。ここで、M^* は M の $\mathcal{O}$-双対加群である。さらに、M が A と A' の間の森田安定同値（すなわち、A-加群の安定圏と A'-加群の安定圏の同値）を導くための必要十分条件は、A-A-両側加群として $M \otimes_{A'} M^* \cong A \oplus U$（ここで U は射影 A-A-両側加群)、さらに、A'-A'-両側加群として $M^* \otimes_A M \cong A' \oplus U'$（ここで U' は射影 A'-A'-両側加群）が成り立つことである（[5、命題 11.2.5] 参照)。Puig は [9、定理 6.9] において、ブロック多元環の間の森田同値および森田安定同値の概念をブロック理論における言葉で言い換えた（以下の定理 3.2.1、参照)。

直既約 A-A'-両側加群 M を直既約 $\mathcal{O}(G \times G')$-加群とみなし、そのヴァーテックスを $\ddot{P}$、$\mathcal{O}\ddot{P}$-ソースを N とする。$\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(N)$ は $\ddot{P}$ の N への作用により $\mathcal{O}\ddot{P}$-インテリア多元環となる。以下、$S = \mathrm{End}_{\mathcal{O}}(N)$ とおく。さらに、射影写像 $G \times G' \to G$、$G \times G' \to G'$ を $\ddot{P}$ に制限することによって得られる写像をそれぞれ $\sigma : \ddot{P} \to P$、$\sigma' : \ddot{P} \to P'$ とする。ここで、$\sigma(\ddot{P}) = P$、$\sigma'(\ddot{P}) = P'$ である。このとき、[9、定理 4.4 と 6.8 節] より次の $\mathcal{O}P$-インテリア多元環同型が存在することが分かる。

(3.1.1)

$$\big(\mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{G \times G'}(S)^{1 \times G'}\big)_{\hat{\gamma}} \cong \mathrm{Ind}_\sigma\big(S \otimes_{\mathcal{O}} \mathrm{Res}_{\sigma'}(A'_{\gamma'})\big)_{\hat{\gamma}}$$

ここで $\hat{\gamma}$ は $\mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{G \times G'}(S)^{1 \times G'}$ と $\mathrm{Ind}_\sigma\big(S \otimes_{\mathcal{O}} \mathrm{Res}_{\sigma'}(A'_{\gamma'})\big)$ 上 P の局所ポイント、γ' は A' 上 P' の局所ポイントである（$\hat{\gamma}$、γ' のくわしい取り方については [9] の 6.8 節を参照)。

3.2 Puig の定理

3.1 節の記号のもと、N が M の $\mathcal{O}\ddot{P}$-ソース加群より、次の $\mathcal{O}(G \times G')$-インテリア多元環としての埋め込みが得られる（[12、例 (16.4) と命題 (18.9)] 参照)。

(3.2.1)

$$\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(M) \to \mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{G \times G'}(S) \cong \mathrm{End}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{G \times G'}(N))$$

この埋め込みによる $\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(M)$ の単位元 1_M の像を含む $\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{G \times G'}(N))$ 上 $G \times G'$ のポイントを $\hat{\alpha}$ とする。さらに、$\mathcal{O}P$-インテリア多元環 $\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O} \oplus (\mathcal{O}P)^n)$（整数 $n \geqq 0$）を T_n とおく。Puig は [9、定理 6.9] において次の定理を与えた。

定理 3.2.1(Puig)　3.1 節と上記の記号のもと、左 A-加群、右 A' -加群として射影的な直既約 A-A'-両側加群 M が A と A' の間の森田安定同値を導くための必要十分条件は、次の (1)、(2) が成り立つことである。

(1)　P、P' がそれぞれブロック b、b' の不足群で

ある。さらに、$P=1$ ならば $P'=1$。
(2) 以下の (a)、(b) を満たす A 上 P の局所ポイント γ と整数 $n \geqq 0$ が存在する。
(a) 次の $\mathcal{O}P$-インテリア多元環としての安定埋め込み $\mathcal{E}$ が存在する。

(3.2.2) $\mathcal{E}: A_\gamma \to T_n \otimes_{\mathcal{O}} \mathrm{Ind}_\sigma(S \otimes_{\mathcal{O}} \mathrm{Res}_{\sigma'}(A'_{\gamma'}))_{\hat{\gamma}}$

(b) 次のマルティプリシティー加群の同型が存在する。
(3.2.3)
$V_A(P_\gamma) \cong \mathrm{Res}_{\mathcal{E}(P_\gamma)}(V_{\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Ind}_{\tilde{P}}^{G\times G'} N)_{\hat{\alpha}}}((P\times G')_{\hat{\gamma}})$

さらに、M が A と A' の間の森田同値を導くための必要十分条件は、条件 (1)、(2) (b) および (2) (a) のかわりに以下の (a') が成り立つことである。
(a') 次の $\mathcal{O}P$-インテリア多元環としての同型 $\mathcal{E}$ が存在する。

(3.2.4) $\mathcal{E}: A_\gamma \cong \mathrm{Ind}_\sigma(S \otimes_{\mathcal{O}} \mathrm{Res}_{\sigma'}(A'_{\gamma'}))_{\hat{\gamma}}$

注意 3.2.2 条件 (b) の $\mathcal{E}(P_\gamma)$ について：安定埋め込み (3.2.2) から導かれる捩れ型群環の同型

(3.2.5) $k_*\hat{\tilde{N}}_G(P_\gamma) \cong k_*\hat{\tilde{N}}_{G\times G'}((P\times G')_{\hat{\gamma}})$

を $\mathcal{E}(P_\gamma)$ とおく（3.3 節の定理 3.3.1 の証明を参照)。

3.3 森田安定同値を導く加群

この節では、森田安定同値を導く加群 M と定理 3.2.1 の条件 (1)、(2) の関係について考察する。M が A と A' の間の森田安定同値を導くとする。このとき、埋め込み (3.2.1) より $M \cong \alpha_0 \mathrm{Ind}_{\tilde{P}}^{G\times G'}(N)$（ここで、$\alpha_0 \in \hat{\alpha}$）となる（[12、補題 10.7] 参照)。そこで、(3.2.3) は次のように表される。

(3.2.3)' $V_A(P_\gamma) \cong \mathrm{Res}_{\mathcal{E}(P_\gamma)}(V_{\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(M)}((P\times G')_{\hat{\gamma}})$

しかし、森田 (安定) 同値を導く加群の間の関係を調べるとき、M のより明確な特徴づけが必要となる。

3.1、3.2 節の記号のもと、さらに、

(3.3.1) $C = \mathrm{Ind}_\sigma(S \otimes_{\mathcal{O}} \mathrm{Res}_{\sigma'}(A'_{\gamma'}))_{\hat{\gamma}}$

とおき、$P \neq 1$ とする。A-A'-両側加群 M が A と A' の間の森田安定同値を導くとき、次の $\mathcal{O}G$-インテリア多元環としての安定埋め込み f および $\mathcal{O}G$-インテリア多元環としての埋め込み g、h が存在する。
(3.3.2)
$f: A = \mathcal{O}Gb \to \mathrm{Ind}_P^G(A_\gamma) \to \mathrm{Ind}_P^G(T_n \otimes_{\mathcal{O}} C)$
$g: \mathrm{Ind}_P^G(C) \to \mathrm{Ind}_P^G(T_n \otimes_{\mathcal{O}} C)$
$h: \mathrm{Ind}_P^G(C) \to \mathrm{Ind}_P^G \mathrm{Ind}_\sigma(S \otimes_{\mathcal{O}} \mathrm{Res}_{\sigma'}(\mathcal{O}G'))$
$\quad \cong \mathrm{End}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Ind}_{\tilde{P}}^{G\times G'}(N))^{1\times G'}$

ここで、合成写像 f における最初の写像は Higman 埋め込み（定理 3.2.1 より A 上 P_γ が G_b のポイント付き不足群となる)、2 番目の写像は定理 3.2.1 の条件 (2) (a) の安定埋め込み $\mathcal{E}$ から誘導される $\mathcal{O}G$-インテリア多元環としての安定埋め込みである（[9、6.4.3] 参照)。g は $\mathcal{O}P$-インテリア多元環としての埋め込み $\mathcal{O} \to T_n$（すなわち、$\mathcal{O}$ から $\mathcal{O} = \mathrm{End}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}) \subset T_n$ への写像）から得られる埋め込み $C \to T_n \otimes_{\mathcal{O}} C$ をさらに誘導して得られた $\mathcal{O}G$-インテリア多元環としての埋め込みである。h における最初の写像は局所化の自然な埋め込みから誘導される $\mathcal{O}G$-インテリア多元環としての埋め込み、それにつづく $\mathcal{O}G$-インテリア多元環同型は [9、系 3.13 と定理 4.4] および [12、例 16.4] から得られる。

定理 3.2.1 における A 上の局所ポイント付き部分群 P_γ について、定理 3.2.1 の条件 (1) より、P_γ は G_b のポイント付き不足群となる。このとき、(3.3.2) の安定埋め込み f に対して、補題 2.5.1 より $f(\gamma) \subset \gamma_1 + \mathrm{Ind}_P^G(T_n \otimes_{\mathcal{O}} C)_1^P$ となる射影的でないポイント付き部分群 P_{γ_1} がとれる。同様にブロック b に対して定まるポイント付き部分群を G_{b_1} とする。この P_{γ_1}、G_{b_1} に対して次の仮定を設ける。

仮定 * : $\mathrm{Ind}_P^G(T_n \otimes_{\mathcal{O}} C)$ 上 P_{γ_1} は G_{b_1} のポイント付き不足群である。

定理 3.3.1 3.1 節の設定と上記の記号のもと $P \neq 1$ とする。M が A と A' の間の森田安定同値を導くとし、上の仮定*をみたすとする。ブロック b に対し、$f(b) \in b_1 + \mathrm{Ind}_P^G(T_n \otimes_{\mathcal{O}} C)_1^G$ となる $\mathrm{Ind}_P^G(T_n \otimes_{\mathcal{O}} C)$ 上 G のポイントを b_1 とおく。さらに、$g(b_2)$ が b_1 に含まれるような $\mathrm{Ind}_P^G(C)$ 上 G のポイント b_2 が定まり、$h(b_2)$ を含む $\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Ind}_{\tilde{P}}^{G\times G'}(N))^{1\times G'}$ 上

G のポイントを b_3 とする。このとき、M は b_3 が定める $\mathrm{Ind}_P^{G\times G'}(N)$ の直既約直和因子と同型である。

[**証明**]　この証明においては、ポイントとそのポイントに属するべき等元を同じ記号で表すことにする。また、定理の主張を 3 つのステップに分けて証明する。

(ステップ 1)　仮定 * の上の段落のように、γ に対して $\mathrm{Ind}_P^G(T_n\otimes_{\mathcal{O}}C)$ 上 P のポイント γ_1 をとる。さらに、マルティプリシティー多元環 $A(P_\gamma)$、$\mathrm{Ind}_P^G(T_n\otimes_{\mathcal{O}}C)(P_{\gamma_1})$ に対応して定まる捩れ型の群環をそれぞれ $k_*\hat{\bar{N}}_G(P_\gamma)$、$k_*\hat{\bar{N}}_G(P_{\gamma_1})$ とする。このとき補題 2.5.1 より f の A^P への制限（同じ記号 f で表す）をもとに次の図式が得られる。ここで、たて方向の写像については 2.3 節を参照。f' は f から自然に導かれる $kC_G(P)$-インテリア多元環としての埋め込みである。さらに、f'' については [12、命題 15.4] を参照。

$$\begin{tikzcd}
A^P \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s_\gamma"'] & \mathrm{Ind}_P^G(T_n\otimes_{\mathcal{O}}C)^P \arrow[d, "s_{\gamma_1}"] \\
A(P_\gamma) \arrow[r, "f'"] & \mathrm{Ind}_P^G(T_n\otimes_{\mathcal{O}}C)(P_{\gamma_1}) \\
k_*\hat{\bar{N}}_G(P_\gamma) \arrow[r, "f''", "\cong"'] \arrow[u, "\bar{\varphi}_\gamma"] & k_*\hat{\bar{N}}_G(P_{\gamma_1}) \arrow[u, "\bar{\varphi}_{\gamma_1}"']
\end{tikzcd}$$

図式-3.3.1

図式-3.3.1 において上の四角形は可換である。しかし、下の四角形は可換とは限らない。

定理 3.2.1 における条件 (1) より、P_γ が G_b のポイント付き不足群となるので、$V_A(P_\gamma)$ は直既約射影的 $k_*\hat{\bar{N}}_G(P_\gamma)$-加群である（[12、系 19.3]）。そこで、$V_A(P_\gamma)$ と対応する $k_*\hat{\bar{N}}_G(P_\gamma)$ の原始べき等元を ϵ とするとき、次が成り立つ。

(3.3.3)　$V_A(P_\gamma)\cong k_*\hat{\bar{N}}_G(P_\gamma)\epsilon$

記号の簡略化のためにステップ 1 の残りの部分では $B=\mathrm{Ind}_P^G(T_n\otimes_{\mathcal{O}}C)$、$\hat{N}_0=\hat{\bar{N}}_G(P_\gamma)$、$\hat{N}_1=\hat{\bar{N}}_G(P_{\gamma_1})$ とおく。また、$N_G(P_\gamma)/P=N_G(P_{\gamma_1})/P$ であるから、これを $\bar{N}$ とおく。さらに、$\hat{N}_0$、$\hat{N}_1$ は具体的に次のように表すことができる（ここでは、式 (2.3.4) より簡略化した標記を用いる)。

(3.3.4)
$$\begin{aligned}\hat{N}_0=\{&(a,x)\in A(P_\gamma)^\times\times\bar{N}\mid\\ &a^{-1}a'a=x^{-1}a'x\text{ for all }a'\in A(P_\gamma)\}\\ \hat{N}_1=\{&(b,x)\in B(P_{\gamma_1})^\times\times\bar{N}\mid\\ &b^{-1}b'b=x^{-1}b'x\text{ for all }b'\in B(P_{\gamma_1})\}\end{aligned}$$

さらに、f' が埋め込みより、$f'(s_\gamma(b))=l$ とおくと ($s_\gamma(b)$ は $A(P_\gamma)$ の単位元)、$f':A(P_\gamma)\cong lB(P_{\gamma_1})l$ となる。ここで、$\hat{N}_0'$ を次のように定める。

(3.3.5)
$$\begin{aligned}\hat{N}_0'=\{&(c,x)\in(lB(P_{\gamma_1})l)^\times\times\bar{N}\mid\\ &c^{-1}c'c=x^{-1}c'x\text{ for all }c'\in lB(P_{\gamma_1})l\}\end{aligned}$$

このとき、図式-3.3.1 の f'' に対して、$f''=(f_1'')^{-1}\circ f_0''$ となるような以下の f_0''、f_1'' が定まり、次の k-多元環準同型から成る可換図式が得られる。

$$\begin{tikzcd}
A(P_\gamma) \arrow[r, "f'", "\cong"'] & lB(P_{\gamma_1})l & \bar{\varphi}_{\gamma_1}(k_*\hat{N}_1) \arrow[l] \\
k_*\hat{N}_0 \arrow[u, "\bar{\varphi}_\gamma"] \arrow[r, "f_0''", "\cong"'] & k_*\hat{N}_0' \arrow[u, "(\bar{\varphi}_{\gamma_1})'"] & k_*\hat{N}_1 \arrow[l, "f_1''"', "\cong"] \arrow[u, "\bar{\varphi}_{\gamma_1}"]
\end{tikzcd}$$

図式-3.3.2

ここで、f_0'' は $\hat{N}_0\to\hat{N}_0'$; $(a,x)\mapsto(f'(a),x)$ により、f_1'' は $\hat{N}_1\to\hat{N}_0'$; $(b,x)\mapsto(lb,x)$ によって与える。また、$\bar{\varphi}_\gamma$、$(\bar{\varphi}_{\gamma_1})'$、$\bar{\varphi}_{\gamma_1}$ は式 (2.3.7) を適用して定まる多元環準同型。さらに、$\bar{\varphi}_{\gamma_1}(k_*\hat{N}_1)\to lB(P_{\gamma_1})l$ は $b'\mapsto lb'$ で与えられる。このとき、$\bar{\varphi}_{\gamma_1}$ と $\hat{N}_1$ の定義に注意すれば、$l=f'(s_\gamma(b))=s_{\gamma_1}(b_1)\in B(P_{\gamma_1})^{\bar{N}}$ より $lb'=b'l$ となることが分かる。

補題 2.5.2 より、j を $A(P_\gamma)$ の原始べき等元とすると、同型 (3.3.3) から次の関係式が得られる。

(3.3.6)　$\bar{\varphi}_\gamma(\epsilon)A(P_\gamma)j\not\subset\bar{\varphi}_\gamma(J(k_*\hat{N}_0))A(P_\gamma)j$

$lf'(j)=f'(j)$ となること、および、図式-3.3.2 の可換性より、上の式の f' による像は次のように表される。

(3.3.7)
$$\bar{\varphi}_{\gamma_1}(\epsilon_1)lB(P_{\gamma_1})f'(j)\not\subset\bar{\varphi}_{\gamma_1}(J(k_*\hat{N}_1))lB(P_{\gamma_1})f'(j)$$

ここで、$\epsilon_1=(f_1'')^{-1}\circ f_0''(\epsilon)=f''(\epsilon)$ である。

(ステップ 2)　$T_n(P) = \mathrm{End}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O} \oplus (\mathcal{O}P)^n)(P) = \mathrm{End}_k(k) = k$ となることに注意すると（[12、命題 27.6] 参照)、[7] の命題 5.6 から、次の同型が得られる。

(3.3.8)　$(T_n \otimes_{\mathcal{O}} C)(P) \cong T_n(P) \otimes_k C(P) = C(P)$

このとき、C が $\hat{\gamma}$ による局所化、よって $\hat{\gamma}$ が C 上 P のただ 1 つの（局所）ポイントであることより、同型 (3.3.8) は $T_n \otimes_{\mathcal{O}} C$ 上 P の局所ポイントはただ 1 であり、それが $1 \otimes \hat{\gamma}$ であることを示す。一方、仮定 * より γ_1 は $\mathrm{Ind}_P^G(T_n \otimes_{\mathcal{O}} C)$ 上 P の局所ポイントである。このことは、[12、命題 16.7] より、$1 \otimes (1 \otimes \hat{\gamma}) \otimes 1$ を含む $\mathrm{Ind}_P^G(T_n \otimes_{\mathcal{O}} C)$ 上 P の局所ポイント $\{1 \otimes (1 \otimes \hat{\gamma}) \otimes 1\}$ と γ_1 が一致していることを意味する。記号の乱用となるが、ステップ 2 では $\{1 \otimes (1 \otimes \hat{\gamma}) \otimes 1\}$ を $1 \otimes \hat{\gamma}$ 、さらに、$\hat{\gamma}$ から導かれる $\mathrm{Ind}_P^G(C)$ 上 P の局所ポイント $\{1 \otimes \hat{\gamma} \otimes 1\}$ を $\hat{\gamma}$ と記すことにする。[8、補題 9.12] と [7、命題 5.6] より、次の 2 つの同型が得られる。

(3.3.9)　$\mathrm{Ind}_P^G(C)(P_{\hat{\gamma}}) \cong \mathrm{Ind}_{k^\times}^{\hat{\bar{N}}_G(P_{\hat{\gamma}})}(C(P_{\hat{\gamma}}))$

(3.3.10)

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ind}_P^G(T_n \otimes_{\mathcal{O}} C)(P_{1\otimes\hat{\gamma}})\\ &\cong \mathrm{Ind}_{k^\times}^{\hat{\bar{N}}_G(P_{1\otimes\hat{\gamma}})}\big((T_n \otimes_{\mathcal{O}} C)(P_{1\otimes\hat{\gamma}})\big)\\ &\cong \mathrm{Ind}_{k^\times}^{\hat{\bar{N}}_G(P_{\hat{\gamma}})}(C(P_{\hat{\gamma}}))\end{aligned}$$

よって、式 (3.3.2) における g から導かれる埋め込み $g' : \mathrm{Ind}_P^G(C)(P_{\hat{\gamma}}) \to \mathrm{Ind}_P^G(T_n \otimes_{\mathcal{O}} C)(P_{1\otimes\hat{\gamma}})$ は同型となる。このとき、k-多元環準同型から成る次の可換図式が得られる

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ind}_P^G(C)^P \arrow[r, "g"] \arrow[d, "s_{\hat{\gamma}}"'] & \mathrm{Ind}_P^G(T_n \otimes_{\mathcal{O}} C)^P \arrow[d, "s_{\gamma_1}=s_{1\otimes\hat{\gamma}}"] \\
\mathrm{Ind}_P^G(C)(P_{\hat{\gamma}}) \arrow[r, "g'", "\cong"'] & \mathrm{Ind}_P^G(T_n \otimes_{\mathcal{O}} C)(P_{1\otimes\hat{\gamma}}) \\
k_*\hat{\bar{N}}_G(P_{\hat{\gamma}}) \arrow[r, "g''", "\cong"'] \arrow[u, "\bar{\varphi}_{\hat{\gamma}}"] & k_*\hat{\bar{N}}_G(P_{1\otimes\hat{\gamma}}) \arrow[u, "\bar{\varphi}_{\gamma_1}=\bar{\varphi}_{1\times\hat{\gamma}}"']
\end{tikzcd}$$

図式-3.3.3

以下、定理の主張における $\mathrm{Ind}_P^G(C)$ 上 G のポイント b_2 の取り方を示す。また、ここでもポイントとそのポイントに属する原始べき等元を同じ記号で表す。ステップ 1 で注意したように P_γ は G_b のポイント付き不足群である。よって $s_\gamma(b)$ は $A(P_\gamma)^{\bar{N}_G(P_\gamma)}$ の射影ポイントである（定理 2.4.1 ; [12、定理 19.1] 参照)。そこで、図式-3.3.1 において $\gamma_1 = 1 \times \hat{\gamma}$ に注意すると、$f'(s_\gamma(b))$ も $\mathrm{Ind}_P^G(T_n \otimes_{\mathcal{O}} C)(P_{1\otimes\hat{\gamma}})^{\bar{N}_G(P_{1\times\hat{\gamma}})}$ の射影ポイントである。さらに、$(g')^{-1} \circ f'(s_\gamma(b))$ も $\mathrm{Ind}_P^G(C)(P_{\hat{\gamma}})^{\bar{N}_G(P_{\hat{\gamma}})}$ の射影ポイントになる。このとき、Puig 対応により $(g')^{-1} \circ f'(s_\gamma(b))$ と対応する $\mathrm{Ind}_P^G(C)^G$ のポイントを b_2 とする。このとき、$P_{\hat{\gamma}}$ は G_{b_2} のポイント付き不足群であり、$\mathrm{Ind}_P^G(T_n \otimes_{\mathcal{O}} C)$ において $P_{1\times\hat{\gamma}}$ は $G_{g(b_2)}$ のポイント付き不足群となる。一方、仮定 * より、$\mathrm{Ind}_P^G(T_n \otimes_{\mathcal{O}} C)$ において $P_{\gamma_1} = P_{1\times\hat{\gamma}}$ は G_{b_1} のポイント付き不足群である。そこで、図式-3.3.1 と図式-3.3.3 の可換性と Puig 対応より、$g(b_2) = b_1$ となることが分かる。

$\gamma_1 = 1 \times \hat{\gamma}$ より、式 (3.3.7) は次のように表される（$j_1 = f'(j)$ とおく)。

(3.3.11)

$$\bar{\varphi}_{1\times\hat{\gamma}}(\epsilon_1) l B(P_{1\times\hat{\gamma}}) j_1 \not\subset \bar{\varphi}_{1\times\hat{\gamma}}(J(k_*\hat{N}_1)) l B(P_{1\times\hat{\gamma}}) j_1$$

この関係式の $(g')^{-1}$ による像をとると図式-3.3.3 の可換性より、次が得られる。

(3.3.12)
$$\begin{aligned}&\bar{\varphi}_{\hat{\gamma}}(\epsilon_2) l_2 \mathrm{Ind}_P^G(C)(P_{\hat{\gamma}}) j_2\\ &\not\subset \bar{\varphi}_{\hat{\gamma}}(J(k_*\hat{\bar{N}}_G(P_{\hat{\gamma}})) l_2 \mathrm{Ind}_P^G(C)(P_{\hat{\gamma}}) j_2\end{aligned}$$

ここで、$\epsilon_2 = (g'')^{-1}(\epsilon_1)$、$l_2 = (g')^{-1}(l)$、$j_2 = (g')^{-1}(j_1)$ である。

次に、式 (3.3.2) における $\mathcal{O}G$-インテリア多元環としての埋め込み h に対して、多元環準同型から成る次の図式が得られる。

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ind}_P^G(C)^P \arrow[r, "h"] \arrow[d, "s_{\hat{\gamma}}"'] & \mathrm{End}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{G\times G'} N)^{P\times G'} \arrow[d, "s_{(\hat{\gamma})'}"] \\
\mathrm{Ind}_P^G(C)(P_{\hat{\gamma}}) \arrow[r, "h'"] & \mathrm{End}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{G\times G'} N)((P \times G')_{(\hat{\gamma})'}) \\
k_*\hat{\bar{N}}_G(P_{\hat{\gamma}}) \arrow[r, "h''", "\cong"'] \arrow[u, "\varphi_{\hat{\gamma}}"] & k_*\hat{\bar{N}}_{G\times G'}((P \times G')_{(\hat{\gamma})'}) \arrow[u, "\varphi_{(\hat{\gamma})'}"']
\end{tikzcd}$$

図式-3.3.4

ここで、$(\hat{\gamma})'$ は埋め込み h を通して $\hat{\gamma}$ によって

定まる $\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{G\times G'}N)$ 上 $P\times G'$ のポイントである。定理におけるように $b_3=h(b_2)$ とおくと、$\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{G\times G'}N)$ 上のポイント付き部分群 $(P\times G')_{(\hat{\gamma})'}$ と $(G\times G')_{b_3}$ に対して、定理 2.4.2 を適用することより、$V_{\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{G\times G'}N)_{b_3}}((P\times G')_{(\hat{\gamma})'})$ が射影直既約 $k_*\hat{\hat{N}}_{G\times G'}((P\times G')_{(\hat{\gamma})'})$-加群となることが分かる（[9] の 6.13 節、参照)。さらに、上記の ϵ_2 に対して $\epsilon_3=h''(\epsilon_2)\in k_*\hat{\hat{N}}_{G\times G'}((P\times G')_{(\hat{\gamma})'})$ とおく。このとき、ステップ 1 と同様な議論をおこなうことにより (3.3.12) から次の同型 (3.3.13) が得られる。すなわち、(3.3.12) の h' による像をとり、図式-3.3.2 と同様な可換図式を用いて、(3.3.7) にあたる関係式を導く。最後に、この関係式に補題 2.5.2 を適用することによって次の同型が得られる。

(3.3.13)
$$V_{\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{G\times G'}N)_{b_3}}((P\times G')_{(\hat{\gamma})'}) \cong k_*\hat{\hat{N}}_{G\times G'}((P\times G')_{(\hat{\gamma})'})\epsilon_3$$

(ステップ 3)　同型 $\mathcal{E}(P_\gamma)=h''\circ(g'')^{-1}\circ f''$: $k_*\hat{\hat{N}}_G(P_\gamma)\cong k_*\hat{\hat{N}}_{G\times G'}((P\times G')_{(\hat{\gamma})'})$ を通して、次が成り立つ。

(3.3.14)
$$k_*\hat{\hat{N}}_G(P_\gamma)\epsilon\cong k_*\hat{\hat{N}}_{G\times G'}((P\times G')_{(\hat{\gamma})'})\epsilon_3$$

そこで、同型 (3.3.3) と (3.3.13) より次の同型が得られる。

(3.3.15)
$$V_A(P_\gamma)\cong \mathrm{Res}_{\mathcal{E}(P_\gamma)}V_{\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{G\times G'}N)_{b_3}}(P\times G')_{(\hat{\gamma})'})$$

よって、この同型と定理 3.2.1 の同型 (3.2.3) より次が得られる（同型 (3.2.3) における $\hat{\gamma}$ は正確にはステップ 2 で定めた $(\hat{\gamma})'$ のことである)。

(3.3.16)
$$V_{\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{G\times G'}N)_{\hat{\alpha}}}((P\times G')_{(\hat{\gamma})'}) \cong V_{\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{G\times G'}N)_{b_3}}(P\times G')_{(\hat{\gamma})'})$$

このとき、明らかに $(P\times G')_{(\hat{\gamma})'}\subset(G\times G')_{b_3}$ である。また、[9、定理 6.9] の $\hat{\gamma}$ と $\hat{\alpha}$ の取り方から $(P\times G')_{(\hat{\gamma})'}\subset(G\times G')_{\hat{\alpha}}$ が成り立つ。そこで、[9] の 6.13 節と同様な方法で定理 2.4.2 を適用することにより $b_3=\hat{\alpha}$ となることが分かる。実際、定理 2.4.2 の P_γ として $\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{G\times G'}N)$ 上の N と対応する極大局所ポイント付き部分群 $\ddot{P}_N$ を取ることができ、次の集合 $\mathcal{S}'_1$ と $\mathcal{S}'_2$ の間に 1 対 1 対応が存在する（くわしくは [9] 参照)。

$\mathcal{S}'_1$: $(P\times G')_{(\hat{\gamma})'}\subset(G\times G')_{\ddot{\beta}}$ となる $\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{G\times G'}N)$ 上 $G\times G'$ のポイント $\ddot{\beta}$ の集合

$\mathcal{S}'_2$: $V_{\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{G\times G'}N)}(P\times G')_{(\hat{\gamma})'})$ の射影直既約直和因子の同型類

以上より、定理の主張のように $b_3\mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{G\times G'}(N)\cong M$ が成り立つことが分かる。 □

注意 3.3.2 3.1 節の設定のもと、M が A と A' の間の森田安定同値を導き、$P=1$ とする。このとき、M として $A\gamma_0\otimes_{\mathcal{O}}\gamma'_0A'$ を取ることができる。ここで、γ_0 と γ'_0 はそれぞれ γ と γ' に属するべき等元である（取り方には依存しない)。実際、定理 3.2.1 の条件 (1) より、$P'=1$ であり、A_γ と $A'_{\gamma'}$ がそれぞれ A と A' のソース多元環となる。また、$P=P'=1$ より、$A_\gamma\cong A'_{\gamma'}\cong\mathcal{O}$ である（[12、定理 39.1] 参照)。さらに、ブロック多元環とそのソース多元環は森田同値（[12、定理 9.9 ; 命題 38.2] 参照)、つまり、$A\gamma_0$（$\gamma_0\in\gamma$）は A と $A_\gamma\cong\mathcal{O}$ の間の森田同値を導く。$A'\gamma'_0$（$\gamma'_0\in\gamma'$）についても同様である。よって、$A\gamma_0\otimes_{\mathcal{O}}\gamma'_0A'$ が A と A' の間の森田同値を導くことが分かる。

3.4 森田同値を導く加群

ブロック多元環 $A=\mathcal{O}Gb$、$A'=\mathcal{O}G'b'$ 対して、直既約 A-A'-両側加群 M が A と A' の間の森田同値を導くとする。このとき、定理 3.2.1 の条件 (2) (a') より、次の $\mathcal{O}G$-インテリア多元環としての埋め込みが存在する。

(3.4.1)
$$A\to\mathrm{Ind}_P^G(A_\gamma)\cong\mathrm{Ind}_P^G(C)\to\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{G\times G'}N)^{1\times G'}$$

ここで、左の写像は Higman 埋め込み、真ん中の同型は定理 3.2.1 の (2) (a') における $\mathcal{E}$ から誘導される同型、右の写像は式 (3.3.2) における $\mathcal{O}G$-インテリア多元環としての埋め込み h である。このとき、森田同値の場合は $\mathcal{E}$ がインテリア多元環としての同型となることより、定理 3.3.1 のポイント付き不足群に関する仮定 * がみたされる。そこで、定理 3.3.1 より次の系が得られる。

系 3.4.1 式 (3.4.1) の埋め込みによるブロック b の像を含む $\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{G\times G'}N)^{1\times G'}$ 上 G のポイントを $\hat{b}$ とする。このとき、M は $\hat{b}$ が定める $\mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{G\times G'}N$ の直既約直和因子と同型である。

4. ベーシック森田同値とソース多元環

4.1 この章のための準備

森田安定同値の局所構造を解明するために、Puig は [9] においてベーシック森田安定同値の概念を導入し、基本結果を与えた（[9] の 7 章、参照)。この節では、3.1 節で導入した記号のもとで Puig の与えた諸結果をまとめる。

M が A と A' の間の森田安定同値を導くとする。このとき、M に関する次の 3 つの条件は同値である（[9、系 7.4] 参照)。(1) σ が同型である。(2) σ' が同型である。(3) S が Dade $\ddot{P}$-多元環である。この同値条件が成り立つとき、M はベーシック森田安定同値 を導くと言う（森田同値の場合は、ベーシック森田同値 を導くと言う)。また、このような M がとれるとき、A と A' はベーシック森田安定同値（森田同値の場合は、ベーシック森田同値）であると言う。

以下、M がベーシック森田安定同値を導くと仮定し、ブロック b の不足群 を $P\neq 1$ とする。このとき、定理 3.2.1 の条件 (2) (a) における埋め込み $\mathcal{E}$ から、P の任意の部分群 $Q\neq 1$ に対して、次の $kC_P(Q)$-インテリア多元環としての埋め込みが導かれる。

(4.1.1)
$$\bar{\mathcal{E}}: A_\gamma(Q)\to \mathrm{Res}_{\sigma_Q^{-1}}(S(\ddot{Q}))\otimes_k \mathrm{Res}_{\sigma'_Q\circ\sigma_Q^{-1}}(A'_{\gamma'}(Q'))$$

ここで、γ と γ' は定理 3.2.1 における局所ポイント、$\ddot{Q}=\sigma^{-1}(Q)$、$Q'=\sigma'(\ddot{Q})$ である。さらに、σ と σ' の制限で与えられる同型を $\sigma_Q : C_{\ddot{P}}(\ddot{Q})\xrightarrow{\cong} C_P(Q)$、$\sigma'_Q : C_{\ddot{P}}(\ddot{Q})\xrightarrow{\cong} C_{P'}(Q')$ とする。さらに、式 (4.1.1) をもとに A 上 G_b のポイント付き不足群 P_γ と A' 上 $G'_{b'}$ のポイント付き不足群 $P'_{\gamma'}$ に対して、次の対応が得られる ([9] の 7 章、参照)。

定理 4.1.1(Puig) P の任意の部分群 $Q\neq 1$ と P' の部分群 $Q'=\sigma'\circ\sigma^{-1}(Q)$ に対して、$Q_\delta\subset P_\gamma$ となる A 上 Q の局所ポイント δ の集合から、$Q'_{\delta'}\subset P'_{\gamma'}$ となる A' 上 Q' の局所ポイント δ' の集合への 1 対 1 対応が存在する。

定理 4.1.1 における対応のもとで対応する局所ポイント付き部分群の組 Q_δ、$Q'_{\delta'}$ をとる。このとき、$b(\delta)$ と $b(\delta')$ をそれぞれ $\mathcal{O}C_G(Q)$ と $\mathcal{O}C_{G'}(Q')$ のブロックで、$\mathrm{Br}_Q(b(\delta)\delta)=\mathrm{Br}_Q(\delta)$ と $\mathrm{Br}_{Q'}(b(\delta')\delta')$ $=\mathrm{Br}_{Q'}(\delta')$ をみたすものとする。ここで、必要であれば Q_δ の G-共役をとることによって $b(\delta)$ の不足群は $C_P(Q)$ としてよい（[4、補題 3.3] 参照)。さらに、ε を A 上 $QC_P(Q)$ の局所ポイントで $Q_\delta\subset QC_P(Q)_\varepsilon\subset P_\gamma$ となるものとする。このとき、定理 4.1.1 の対応で ε と対応する $Q'C_{P'}(Q')$ の局所ポイントを ε' とすると、ε' は $Q'_{\delta'}\subset Q'C'_P(Q')_{\varepsilon'}\subset P'_{\gamma'}$ を満たすことが分かる。

上記 $b(\delta)$、$b(\delta')$、ε、ε' 対して、$C_P(Q)_{\mathrm{Br}_Q(\varepsilon)}$ はブロック多元環 $kC_G(Q)\bar{b}(\delta)$ 上 $C_G(Q)_{\bar{b}(\delta)}$ のポイント付き不足群であり、さらに、$C_{P'}(Q')_{\mathrm{Br}_{Q'}(\varepsilon')}$ はブロック多元環 $kC_{G'}(Q')\bar{b}(\delta')$ 上 $C_{G'}(Q')_{\bar{b}(\delta')}$ のポイント付き不足群となる（ここで、$\bar{b}(\delta)=\mathrm{Br}_Q(b(\delta))$、$\bar{b}(\delta')=\mathrm{Br}_{Q'}(b(\delta'))$ である)。そこで、$A_\varepsilon(Q)$ と $A'_{\varepsilon'}(Q')$ はそれぞれブロック $\bar{b}(\delta)$ と $\bar{b}(\delta')$ のソース多元環となる。さらに、S が $\ddot{Q}$-多元環（または、$\ddot{Q}C_{\ddot{P}}(\ddot{Q})$-多元環) として Dade $\ddot{Q}$-多元環（または、Dade $\ddot{Q}C_{\ddot{P}}(\ddot{Q})$-多元環）より、$\ddot{\delta}$ を S 上 $\ddot{Q}$ のただ 1 つの局所ポイント、$\ddot{\varepsilon}$ を S 上 $\ddot{Q}C_{\ddot{P}}(\ddot{Q})$ のただ 1 つの局所ポイントとすると、次が成り立つ。

(4.1.2) $$S_{\ddot{\varepsilon}}(\ddot{Q})=S_{\ddot{\varepsilon}}(\ddot{Q}_{\ddot{\delta}})=\mathrm{End}_k\big(V_{S_{\ddot{\varepsilon}}}(\ddot{Q}_{\ddot{\delta}})\big)$$

以後、$S_{\ddot{\varepsilon}}$ の Q_δ に関するマルティプリシティー加群 $V_{S_{\ddot{\varepsilon}}}(\ddot{Q}_{\ddot{\delta}})$ を $N(Q_\delta)$ で表す。$N(Q_\delta)$ は $kC_{\ddot{P}}(\ddot{Q})$-加群である。以上のことから、埋め込み (4.1.1) より次の $kC_P(Q)$-インテリア多元環としての埋め込み $\mathcal{E}(Q)$ が得られることが分かる。

(4.1.3)
$$A_\varepsilon(Q)\to \mathrm{Res}_{\sigma_Q^{-1}}(\mathrm{End}_k(N(Q_\delta))\otimes_k \mathrm{Res}_{\sigma'_Q\circ\sigma_Q^{-1}}(A'_{\varepsilon'}(Q'))$$

この埋め込みをもとに Puig は次を示した（[9、7.7.4] 参照)。

定理 4.1.2(Puig)　$\mathrm{Ind}_{C_{\ddot{P}}(\ddot{Q})}^{C_{G\times G'}(\ddot{Q})}(N(Q_\delta))$ の直既約直和因子で $kC_G(Q)\bar{b}(\delta)$ と $kC_{G'}(Q')\bar{b}(\delta')$ の間のベーシック森田同値を導く $kC_{G\times G'}(\ddot{Q})$-加群が存在する。

そこで、(3.4.1) と同様に、埋め込み (4.1.3) から次の $kC_G(Q)$-インテリア多元環としての埋め込みが存在することが分かる（(4.1.3) における右のインテリア多元環の局所化をとることにより、定理 3.2.1 の (3.2.4) にあたる同型が得られる)。

(4.1.4)

$$kC_G(Q)\bar{b}(\delta)\to \mathrm{Ind}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)}(A_\varepsilon(Q))$$
$$\to \mathrm{End}_k(\mathrm{Ind}_{C_{\ddot{P}}(\ddot{Q})}^{C_{G\times G'}(\ddot{Q})}(N(Q_\delta)))^{1\times C_{G'}(Q')}$$

ここで、最初の写像は $C_P(Q)_{\mathrm{Br}_Q(\varepsilon)}$ が $C_G(Q)_{\bar{b}(\delta)}$ のポイント付き不足群であることより得られる Higman 埋め込みである。以上より、定理 4.1.2 と 3.4 節の系 3.4.1 より次が得られる。

系 4.1.3　埋め込み (4.1.4) によるブロック $\bar{b}(\delta)$ の像を含む $\mathrm{End}_k(\mathrm{Ind}_{C_{\ddot{P}}(\ddot{Q})}^{C_{G\times G'}(\ddot{Q})}(N(Q_\delta)))$ 上 $C_{G\times G'}(\ddot{Q})$ $=C_G(Q)\times C_{G'}(Q')$ のポイントを $\hat{\beta}$ とする。このとき、$\hat{\beta}$ が定める $\mathrm{Ind}_{C_{\ddot{P}}(\ddot{Q})}^{C_{G\times G'}(\ddot{Q})}(N(Q_\delta))$ の直既約直和因子 $M(Q_\delta)$ は $kC_G(Q)\bar{b}(\delta)$ と $kC_{G'}(Q')\bar{b}(\delta')$ の間のベーシック森田同値を導く。

4.2 この章の主定理

この節の目的は、以下の定理 4.2.7 を証明することである。前節において、Puig による $\mathcal{O}Gb$ と $\mathcal{O}G'b'$ の間のベーシック森田安定同値の局所化の方法について記したが、以後はベーシック森田同値の場合のみを取り扱う。次の命題は埋め込み (3.4.1) と (4.1.4) の関係を調べるときに基本となるものである。

命題 4.2.1　P、Q を G の部分群で $P\geq Q\neq 1$ とする。さらに、D を $\mathcal{O}P$-インテリア多元環とする。このとき、次の $kC_G(Q)$-インテリア多元環としての埋め込みが存在する。

(4.2.1)　$\iota:\mathrm{Ind}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)}(D(Q))\to \mathrm{Ind}_P^G(D)(Q)$

証明　$i:\mathrm{Ind}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)}(D^Q)\to \mathrm{Ind}_P^G(D)^Q$ を次で定める。$i(x\otimes_{C_P(Q)}d\otimes_{C_P(Q)}y^{-1})=x\otimes_P d\otimes_P y^{-1}$（ここで、$x$、$y\in C_G(Q)$、$d\in D^Q$)。このとき、$i$ は単射かつ $\mathcal{O}C_G(Q)$-インテリア多元環準同型となることは容易にチェックできる（(2.1.7)、(2.1.8) 参照)。さらに、1 を $\mathrm{Ind}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)}(D^Q)$ の単位元とすると、$i(1)$ は次のように表される。

(4.2.2)　$i(1)=\displaystyle\sum_{g\in[C_G(Q)/C_P(Q)]} g\otimes_P 1_D\otimes_P g^{-1}$

そこで、式 (4.2.2) と積の定義 (2.1.7) より、$\alpha=i(1)(x\otimes_P d\otimes_P y^{-1})i(1)\in i(1)\mathrm{Ind}_P^G(D)^Q i(1)$ に対して（ここで、x、$y\in G$、$d\in \mathrm{Ind}_P^G(D)^Q$)、次の関係式 (4.2.3) をみたす代表元 g_α、$g'_\alpha\in[C_G(Q)/C_P(Q)]$ が一意的に定まることが分かる。

(4.2.3)　$\alpha=g_\alpha\otimes_P(g_\alpha^{-1}xdy^{-1}g'_\alpha)\otimes_P(g'_\alpha)^{-1}$
かつ $g_\alpha^{-1}xdy^{-1}g'_\alpha$ が D^Q に属する

さらに $\mathrm{Ind}_P^G(D)^Q$ の任意の元 $\displaystyle\sum_{x,y\in[G/P]}x\otimes_P d_{x,y}\otimes_P y^{-1}$ に対しても同様な結果が得られることより、次の等式が成り立つ。

(4.2.4)　$i(\mathrm{Ind}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)}(D^Q))=i(1)\mathrm{Ind}_P^G(D))^Q i(1)$

よって、i は埋め込み写像である。次に、命題の主張における $\iota:\mathrm{Ind}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)}(D(Q))\to\mathrm{Ind}_P^G(D)(Q)$ を次で定める。

(4.2.5)

$$\iota(x\otimes_{C_P(Q)}\bar{d}\otimes_{C_P(Q)}y^{-1})=\overline{i(x\otimes_{C_P(Q)}d\otimes_{C_P(Q)}y^{-1})}$$

このとき、i が $\mathcal{O}C_G(Q)$-インテリア多元環準同型より ι は $kC_G(Q)$-インテリア多元環準同型であり、像について次が成り立つ。

(4.2.6)

$$\iota\big(\mathrm{Ind}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)}(D(Q))\big)=\overline{i(1)}\mathrm{Ind}_P^G(D)(Q)\overline{i(1)}$$
$$=\iota(\bar{1})\mathrm{Ind}_P^G(D)(Q)\iota(\bar{1})$$

さらに、ι は単射である。実際、$\hat{D}=\mathrm{Ind}_P^G(D)$ とおくと、

(4.2.7)　$\big(\displaystyle\sum_{R\lneq Q}\mathrm{Tr}_R^Q(\hat{D}^R)\big)\ \cap\ i(1)\hat{D}^Q i(1)$
$\quad=\displaystyle\sum_{R\lneq Q}\mathrm{Tr}_R^Q(i(1)\hat{D}^R i(1))$

ここで、$\beta = \mathrm{Tr}_R^Q(\alpha)$ ($\alpha \in i(1)\hat{D}^R i(1))$) に対して、$\alpha$ を (4.2.3) のように表すとき、$g_\alpha^{-1}xdy^{-1}g'_\alpha \in D^R$ となることが分かる。そこで、$d(\alpha) = g_\alpha^{-1}xdy^{-1}g'_\alpha$ とおくと、次が得られる ((4.2.3) の下の段落での注意に従ってチェックすれば、任意の α に対しても同様なことが成り立つことが分かる)。

(4.2.8)
$$\beta = i\big(g_\alpha \otimes_{C_P(Q)} \mathrm{Tr}_R^Q(d(\alpha)) \otimes_{C_P(Q)} (g'_\alpha)^{-1}\big)$$

よって ι は単射であり、ι が $kC_G(Q)$-インテリア多元環としての埋め込みであることが分かる。 □

この章の主定理 4.2.7 は、$A = \mathcal{O}Gb$ と $A' = \mathcal{O}G'b'$ がベーシック森田同値であるという仮定のもと、以下の補題 4.2.4、4.2.5、4.2.6 から得られる。次の 2 つの補題は補題 4.2.4 の準備として与える。A と A' がベーシック森田同値であるとき、定理 3.2.1 の (2) (a') より次の $\mathcal{O}P$-インテリア多元環としての埋め込みが得られる。記号の乱用となるが、この埋め込みも $\mathcal{E}$ で表す。

(4.2.9) $\quad \mathcal{E} : A_\gamma \to \mathrm{Res}_{\sigma^{-1}}(S) \otimes_{\mathcal{O}} \mathrm{Res}_{\sigma'\circ\sigma^{-1}}(A'_{\gamma'})$

次の補題は、この埋め込みから得られる $\mathrm{Ind}_P^G(\mathcal{E})$ と式 (4.1.1) の埋め込みから得られる $\mathrm{Ind}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)}(\bar{\mathcal{E}})$ の関係を示す。

補題 4.2.2 5 章の可換図式-5.1 が得られる。図式-5.1 において Br_0、Br_1 は Brauer 準同型、ι_0、ι_1 は命題 4.2.1 を適用して得られる $kC_G(Q)$-インテリア多元環としての埋め込みである。また、1 行目の写像は $\mathcal{O}C_G(Q)$ (2、3 行目の写像は $kC_G(Q)$)-インテリア多元環としての埋め込みである。

[**証明**] 図式-5.1 における上の四角形は、[12] の命題 15.6 から得られる可換図式で、$\mathrm{Ind}_P^G(\mathcal{E})(Q)$ はインテリア多元環としての埋め込みである。下の四角形については、各準同型の定義に従ってチェックすることによって可換であることが分かる。また、$\mathcal{E}$ と $\bar{\mathcal{E}}$ がインテリア多元環としての埋め込みより、$\mathrm{Ind}_P^G(\mathcal{E})$ と $\mathrm{Ind}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)}(\bar{\mathcal{E}})$ もインテリア多元環としての埋め込みとなる。 □

ポイント γ'、ε'、$\ddot{\varepsilon}$ の取り方より (4.1 節を参照)、次の包含関係がある。

(4.2.10) $\quad A'_{\gamma'} \subset \mathcal{O}G'$、$A'_{\varepsilon'} \subset A'_{\gamma'}$、$S_{\ddot{\varepsilon}} \subset S$

補題 4.2.3 5 章の可換図式-5.2 が得られる。図式-5.2 において記号の付いていない写像は (4.2.10) の包含関係から得られる $\mathcal{O}C_G(Q)$ または $kC_G(Q)$-インテリア多元環としての自然な埋め込みを表す。また、Br_j と ι_j ($j = 1$、2) は補題 4.2.2 と同じ意味である。さらに、ρ'、ρ'_Q は次の合成写像を表す (最後の写像は包含写像)。

(4.2.11)
$$\rho' : P \xrightarrow{\sigma^{-1}} \ddot{P} \xrightarrow{\sigma'} P' \hookrightarrow G'$$
$$\rho'_Q : C_P(Q) \xrightarrow{\sigma_Q^{-1}} C_{\ddot{P}}(\ddot{Q}) \xrightarrow{\sigma'_Q} C_{P'}(Q') \hookrightarrow C_{G'}(Q')$$

[**証明**] 図式-5.2 における上の四角形は [12、命題 15.6] から得られる可換図式である。真ん中の四角形については [7、命題 5.6] と命題 4.2.1 より各準同型の定義に従ってチェックすることによって可換であることが分かる。また、下の四角形が可換であることは自明である。 □

$A'_{\varepsilon'} \subset A'_{\gamma'}$ と同様に、$A_\varepsilon \subset A_\gamma$ となることより、5 章の可換図式-5.3 が得られる。図式-5.3 において、列方向の準同型は $A'_{\varepsilon'} \subset A'_{\gamma'}$ と $A_\varepsilon \subset A_\gamma$ より導かれる $kC_G(Q)$-インテリア多元環としての埋め込みである。また、$\mathrm{Ind}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)}(\mathcal{E}(Q))$ は (4.1.3) の埋め込み $\mathcal{E}(Q)$ から導かれる $kC_G(Q)$-インテリア多元環としての埋め込みである。図式-5.1、5.2、5.3 を合成することにより次の補題が得られる。

補題 4.2.4 5 章の可換図式-5.4 が得られる。図式-5.4 において、ε'、$\varepsilon(Q)'$ はそれぞれ ε、$\varepsilon(Q)$ と包含写像による埋め込みとの合成を表す。また、$\hat{\iota}_0$、$\hat{\iota}_2$ もそれぞれ ι_0、ι_2 と包含写像による埋め込みとの合成を表す。さらに、図式-5.4 における Brauer 準同型 Br_j ($j = 0$、2) 以外の写像は、$\mathcal{O}C_G(Q)$ または $kC_G(Q)$-インテリア多元環としての埋め込みである。

次に 5 章の図式-5.5 を考察する。図式-5.5 における写像の定義は次の補題の証明の中で与える。

補題 4.2.5　5 章の可換図式-5.5 が得られる。図式-5.5 において、Br_j（$j=2$、3）を除く全ての写像は、$\mathcal{O}C_G(Q)$ または $kC_G(Q)$-インテリア多元環としての埋め込みである。

[**証明**]　Br_j（$j=2$、3）は Brauer 準同型、ι_j（$j=2$、3）は命題 4.2.1 を適用して得られる $kC_G(Q)$-インテリア多元環としての埋め込みである。以下、図式-5.5 における四角形 (1) から (5) について考察する。

(1)　h_0 は次で与えられる $\mathcal{O}C_G(Q)$-インテリア多元環としての同型である。

(4.2.12)

$$\begin{aligned}h_0:&\mathrm{Ind}_P^G\big(\mathrm{Res}_{\sigma^{-1}}(S)\otimes_{\mathcal{O}}\mathrm{Res}_{\rho'}(\mathcal{O}G')\big)^Q\\ &=\mathrm{Ind}_P^G\Big(\mathrm{Res}_{\sigma^{-1}}\big(S\otimes_{\mathcal{O}}\mathrm{Res}_{\ddot\rho}(\mathcal{O}G')\big)\Big)^Q\\ &\cong\mathrm{Ind}_{\ddot P}^{G\times G'}(S)^{Q\times G'}\end{aligned}$$

ここで、$\ddot\rho$ は σ' と包含写像 $P'\hookrightarrow G'$ の合成であり、同型写像は [9、系 3.13 と 定理 4.4] によって与えられる。このとき、h_0 から導かれる $kC_G(Q)$-インテリア多元環としての同型 $h_0(Q)$ により (1) の可換図式が得られる。

(2)　[9] の定理 4.4 から、$\mathrm{Res}_{\sigma^{-1}}(\mathrm{S})\otimes_{\mathcal{O}}\mathrm{Res}_{\rho'}(\mathcal{O}\mathrm{G}')\cong\mathrm{Ind}_{\ddot P}^{P\times G'}(S)^{1\times G'}$ が得られる。この同型から誘導される同型を h_1 とする。

(4.2.13)

$$\begin{aligned}h_1:&\mathrm{Ind}_P^G(\mathrm{Res}_{\sigma^{-1}}(\mathrm{S})\otimes_{\mathcal{O}}\mathrm{Res}_{\rho'}(\mathcal{O}\mathrm{G}'))\\ &\cong\mathrm{Ind}_P^G(\mathrm{Ind}_{\ddot P}^{P\times G'}(S)^{1\times G'})\end{aligned}$$

さらに、h_1 から導かれる Brauer 商環の間の同型を $h_1(Q)$ とする。明らかに図式 (2) は可換となるが、$h_0(Q)\circ h_1(Q)^{-1}$ による元の対応を具体的に表すことができる（これは次の補題の証明に必要となる)。実際、$(\mathrm{Ind}_{\ddot P}^{G\times G'}(S))^{1\times G'}\cong\mathrm{Ind}_{P\times G'}^{G\times G'}\big(\mathrm{Ind}_{\ddot P}^{P\times G'}(S)\big)^{1\times G'}\cong\mathrm{Ind}_P^G\big(\mathrm{Ind}_{\ddot P}^{P\times G'}(S)^{1\times G'}\big)$ に注意すると、[9、系 3.13 と定理 4.4] より次の等式が得られることが分かる。

(4.2.14)

$$\begin{aligned}&h_0(Q)\circ(h_1(Q))^{-1}\overline{(x\otimes_P\alpha\otimes_P y^{-1})}\\ &=\overline{(x,1)\otimes_{P\times G'}\alpha\otimes_{P\times G'}(y^{-1},1)}\end{aligned}$$

ここで、x、$y\in[G/P]$ そして $\alpha\in\mathrm{Ind}_{\ddot P}^{P\times G'}(S)^{1\times G'}$。

(3)　[7、命題 5.6] に注意すると次の $\mathcal{O}C_P(Q)$-インテリア多元環としての同型が得られる。

(4.2.15)

$$\begin{aligned}&\mathrm{Res}_{\sigma_Q^{-1}}(S(\ddot Q))\otimes_k\mathrm{Res}_{\rho'_Q}(kC_{G'}(Q'))\\ &\cong\big(\mathrm{Res}_{\sigma^{-1}}(\mathrm{S})\otimes_{\mathcal{O}}\mathrm{Res}_{\rho'}(\mathcal{O}\mathrm{G}')\big)(\mathrm{Q})\\ &\cong\mathrm{Ind}_{\ddot P}^{P\times G'}(S)^{1\times G'}(Q)\end{aligned}$$

h_2 はこの同型を誘導することによって与えられる $kC_G(Q)$-インテリア多元環としての同型である。このとき、元の対応をチェックすることにより、$h_1(Q)\circ\iota_2=\iota_3\circ h_2$ となることが分かる。

(4)　h_3 は次の同型を誘導することによって与えられる $kC_G(Q)$-インテリア多元環としての同型である。

(4.2.16)

$$\begin{aligned}&\mathrm{Res}_{\sigma_Q^{-1}}(S(\ddot Q))\otimes_k\mathrm{Res}_{\rho'_Q}(kC_{G'}(Q'))\\ &\cong\mathrm{Res}_{\sigma_Q^{-1}}\Big(S(\ddot Q)\otimes_k\mathrm{Res}_{\ddot\rho_Q}(kC_{G'}(Q'))\Big)\\ &\cong\mathrm{Ind}_{C_{\ddot P}(\ddot Q)}^{C_{P\times G'}(\ddot Q)}(S(\ddot Q))^{1\times C_{G'}(Q')}\end{aligned}$$

ここで、$\ddot\rho_Q$ は 準同型 $C_{\ddot P}(\ddot Q)\cong C_{P'}(Q')\hookrightarrow C_{G'}(Q')$（最初の同型は σ'_Q）のことであり、$C_{P\times G'}(\ddot Q)=C_P(Q)\times C_{G'}(Q')$ に注意する。このとき、明らかに (4) の四角形は可換となるが、$h_2\circ h_3^{-1}$ による元の対応を具体的に表すことができる（これは次の補題の証明に必要となる)。実際、[9、定理 4.4] より $\mathrm{Ind}_{C_{\ddot P}(\ddot Q)}^{C_{P\times G'}(\ddot Q)}(S(\ddot Q))^{1\times C_{G'}(Q')}$ の任意の元 β を次のように表す $\bar a\otimes_k\bar b\in S(\ddot Q)\otimes_k\mathrm{Res}_{\ddot\rho_Q}(kC_{G'}(Q'))$ が一意的に定まることが分かる。

(4.2.17)　$\beta=\mathrm{Tr}_{1\times1}^{1\times C_{G'}(Q')}(q_{C_P(Q),C_{G'}(Q')}^{S(\ddot Q)}(\bar a\otimes_k\bar b))$

ここで、$q_{C_P(Q),C_{G'}(Q')}^{S(\ddot Q)}$ は [9、定理 4.4] における線形写像 $S(\ddot Q)\otimes_k\mathrm{Res}_{\ddot\rho_Q}(kC_{G'}(Q'))\to\mathrm{Ind}_{C_{\ddot P}(\ddot Q)}^{C_{P\times G'}(\ddot Q)}(S(\ddot Q))$ を表す。この結果より、同型 $h_2\circ h_3^{-1}$ は、次の対応で与えられる写像の $C_G(Q)$ への誘導と一致する（写像は代表元 a、b の取り方によらず決まる)。

(4.2.18)

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ind}_{C_{\ddot P}(\ddot Q)}^{C_{P\times G'}(\ddot Q)}(S(\ddot Q))^{1\times C_{G'}(Q')}\to\mathrm{Ind}_{\ddot P}^{P\times G'}(S)^{1\times G'}(Q),\\ &\beta\mapsto\overline{\mathrm{Tr}_{1\times1}^{1\times G'}(q_{P,G'}^S(a\otimes_{\mathcal{O}}b))}\end{aligned}$$

ここで、$q^S_{P,G'}$ も Puig の定理 4.4 における線形写像 $S\otimes_{\mathcal{O}}\mathrm{Res}_{\ddot P}(\mathcal{O}G')\to\mathrm{Ind}_{\ddot P}^{P\times G'}(S)$ を表す。

(5)　(5) の四角形の 2 つの列方向の写像は、包含 $S_{\ddot\varepsilon}(\ddot Q)\subset S(\ddot Q)$ から得られる $kC_G(Q)$-インテリア多元環としての埋め込みである。そこで、h_4 を h_3 の制限写像とすると、図式の可換性は自明である。

上記 (1)、(2)、(3)、(4)、(5) より補題の主張は成り立つ。 □

次に 5 章の図式-5.6 を考察する。図式-5.6 における写像の定義は次の補題の証明の中で与える。

補題 4.2.6　5 章の可換図式-5.6 が得られる。図式-5.6 において、よこ方向の写像は多元環準同型、Brauer 準同型 Br_j（$j=3$、4）以外のたて方向の写像はインテリア多元環としての埋め込みである。

[**証明**]　補題 4.2.5 と同様に、図式-5.6 を四角形 (1) から (5) に分けて考察する。この証明においては、対象となる多元環によらず Q に関する Brauer 準同型を Br_Q で表し、$\ddot Q$ に関する Brauer 準同型を $\mathrm{Br}_{\ddot Q}$ で表す。また、この証明においては $\otimes$ の添え字は省略する。

(1)　(1) の証明に限り $D=\mathrm{Ind}_{\ddot P}^{G\times G'}(S)$ とおく。さらに、$D^{1\times G'}(Q)$ を次のように定め、Q に関する Brauer 商環とみなす。

(4.2.19)
$$D^{1\times G'}(Q)=D^{Q\times G'}/(\sum_{R\lneq Q}D^{Q\times G'}_{R\times G'}+\mathcal{P}D^{Q\times G'})$$

ここで、和は Q の部分群 $R\neq Q$ の全てにわたってとり、$D^{Q\times G'}_{R\times G'}=\mathrm{Tr}^{Q\times G'}_{R\times G'}(D^{R\times G'})$ である。さらに $\ddot R=\sigma^{-1}(R)$ とおくと、$d\in D^{R\times G'}\subset D^{\ddot R}$ に対して $\mathrm{Tr}^{Q\times G'}_{R\times G'}(d)=\mathrm{Tr}^{\ddot Q}_{\ddot R}(d)$ が成り立つ。そこで、次の k-多元環準同型を定義することができる。

(4.2.20)
$$t_0: D^{1\times G'}(Q)\to D(\ddot Q),\ \ \mathrm{Br}_Q(d)\mapsto\mathrm{Br}_{\ddot Q}(d)$$

また、図式 (1) における上の行方向の写像は包含写像を表す。よって、t_0 の定義より図式 (1) の可換性は明らかである。

(2)　補題 4.2.5 の証明における式 (4.2.14) と t_0 の定義から、写像 t_1 を次のように定める（x、y、α は (4.2.14) と同じである)。

(4.2.21)
$$t_1(\mathrm{Br}_Q(x\otimes\alpha\otimes y^{-1}))=\mathrm{Br}_{\ddot Q}\big((x,1)\otimes\alpha\otimes(y^{-1},1)\big)$$

このとき、明らかに図式 (2) は可換であり、t_1 は k-多元環準同型となる。

(3)　剰余類の代表系 $[C_{G\times G'}(\ddot Q)/C_{P\times G'}(\ddot Q)]$ として $\{(x,1)\mid x\in[C_G(Q)/C_P(Q)]\}$ を取ることができる。また、$\mathrm{Ind}_{\ddot P}^{P\times G'}(S)$ について (1) と同様なことが成り立つ。そこで、写像 t_2 を次のように定義することができ、t_2 が k-多元環準同型となることが分かる。

(4.2.22)
$$t_2(x\otimes\mathrm{Br}_Q(\alpha)\otimes y^{-1})=(x,1)\otimes\mathrm{Br}_{\ddot Q}(\alpha)\otimes(y^{-1},1)$$

ここで $x,y\in[C_G(Q)/C_P(Q)]$、$\alpha\in\mathrm{Ind}_{\ddot P}^{P\times G'}(S)^{1\times G'}$。また、$\iota_j$ ($j=3$、4）は補題 4.2.1 を適用して得られるインテリア多元環としての埋め込みである。このとき、(4.2.21)、(4.2.22) と命題 4.2.1 より、元の対応をチェックすることによって図式 (3) が可換であることが分かる。

(4)　図式 (4) は次の図式を誘導することによって得られる。行方向の誘導において、ここでも、$[C_{G\times G'}(\ddot Q)/C_{P\times G'}(\ddot Q)]$ の代表系として $\{(x,1)\mid x\in[C_G(Q)/C_P(Q)]\}$ を取る。

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ind}_{\ddot P}^{P\times G'}(S)^{1\times G'}(Q) \arrow[r, "t_2"] & \mathrm{Ind}_{\ddot P}^{P\times G'}(S)(\ddot Q) \\
\mathrm{Ind}_{C_{\ddot P}(\ddot Q)}^{C_{P\times G'}(\ddot Q)}(S(\ddot Q))^{1\times C_{G'}(Q')} \arrow[u, "h_2\circ h_3^{-1}"] \arrow[r, hook] & \mathrm{Ind}_{C_{\ddot P}(\ddot Q)}^{C_{P\times G'}(\ddot Q)}(S(\ddot Q)) \arrow[u, "\phi"']
\end{tikzcd}$$

図式-4.2.1

ここで、ϕ は命題 4.2.1 から得られる $C_{P\times G'}(\ddot Q)$ インテリア多元環としての埋め込みである。また、図式-4.2.1 の準同型を表す記号として、その誘導によって得られる準同型を表す図式- 5.6 における記号と同じ記号を用いる。さらに、記号の付いていない写像は包含写像である。

以下、図式-4.2.1 が可換となることを示す。まず、$\mathrm{Ind}_{C_{\ddot P}(\ddot Q)}^{C_{P\times G'}(\ddot Q)}(S(\ddot Q))^{1\times C_{G'}(Q')}$ の元 β を (4.2.17) のように表す。このとき、(4.2.18)、(4.2.22) より、$t_2\circ h_2\circ h_3^{-1}$ による β の像は次のように表される。

(4.2.23)
$t_2 \circ h_2 \circ h_3^{-1}(\beta) = \mathrm{Br}_{\ddot{Q}}\big(\mathrm{Tr}_{1\times 1}^{1\times G'}(q_{P,G'}^{S}(a \otimes b))\big)$

一方、ϕ について、$q_{C_P(Q),C_{G'}(Q')}^{S(\ddot{Q})}$ と $q_{P,G'}^{S}$ の定義に注意すると、次の等式が得られる。

(4.2.24)

$$\phi(\beta) = \phi\big(\mathrm{Tr}_{1\times 1}^{1\times C_{G'}(Q')}(q_{C_P(Q),C_{G'}(Q')}^{S(\ddot{Q})}(\bar{a} \otimes \bar{b}))\big)$$
$$= \mathrm{Br}_{\ddot{Q}}\big(\mathrm{Tr}_{1\times 1}^{1\times C_{G'}(Q')}(q_{P,G'}^{S}(a \otimes b))\big)$$

このとき、$t_2 \circ h_2 \circ h_3^{-1}(\beta) = \phi(\beta)$ が成り立つ。実際、$\xi = q_{P,G'}^{S}(a \otimes b)$ とおくと、$\ddot{Q}$ が $\ddot{Q} = \{(\sigma(\ddot{q}), \sigma'(\ddot{q})) \mid \ddot{q} \in \ddot{Q}\}$ と表されることより、a、b の取り方から、$\xi \in \mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{P\times G'}(S)^{\ddot{Q}}$ が成り立つ。よって、$x' \in G'$、$\ddot{q} \in \ddot{Q}$ に対して次の等式が得られる（ここで、$(p, x') \in P \times G'$ の ξ への作用は共役 $\xi^{(p,x')} = (p, x')^{-1}\xi(p, x')$)。

(4.2.25)　$\big(\xi^{(1,x')}\big)^{\ddot{q}} = \xi^{(1,\sigma'(\ddot{q})^{-1}x'\sigma(\ddot{q}))}$

この等式は $\ddot{Q}$ が $\{\xi^{(1,x')} \mid x' \in G'\}$ に作用していることを意味する。また、$x' \in G'$ に対して、$\mathrm{St}_{\xi^{(1,x')}} = \{\ddot{q} \in \ddot{Q} \mid \big(\xi^{(1,x')}\big)^{\ddot{q}} = \xi^{(1,x')}\}$ とおくと、次の包含が得られる（$\langle x' \rangle$ は x' で生成される巡回群を表す)。

(4.2.26)　$(\sigma')^{-1}(C_{Q'}(\langle x' \rangle)) \subset \mathrm{St}_{\xi^{(1,x')}}$

このとき、$(\sigma')^{-1}(C_{Q'}(\langle x' \rangle)) = \mathrm{St}_{\xi^{(1,x')}} = \ddot{Q}$ が成り立つための必要十分条件は、$x' \in C_{G'}(Q')$ であることが分かる。このことより、次が得られる。

(4.2.27)

$$\big(\mathrm{Tr}_{1\times 1}^{1\times G'}(\xi) - \mathrm{Tr}_{1\times 1}^{1\times C_{G'}(Q')}(\xi)\big) \in \sum_{\ddot{R} \lneq \ddot{Q}} \mathrm{Tr}_{\ddot{R}}^{\ddot{Q}}(\mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{P\times G'}(S)^{\ddot{R}})$$
$$+\mathbf{p}\big(\mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{P\times G'}(S)\big)$$

よって、(4.2.23) と (4.2.24) から $t_2 \circ h_2 \circ h_3^{-1}(\beta) = \phi(\beta)$ が成り立つ。

(5)　$C_{P\times G'}(\ddot{Q}) = C_P(Q) \times C_{G'}(Q')$ と $C_{G\times G'}(\ddot{Q}) = C_G(Q) \times C_{G'}(Q')$ より次の $kC_G(Q)$-インテリア多元環としての同型が得られる。

(4.2.28)

$$\mathrm{Ind}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)}\Big(\mathrm{Ind}_{C_{\ddot{P}}(\ddot{Q})}^{C_{P\times G'}(\ddot{Q})}(S_{\ddot{\varepsilon}}(\ddot{Q}))^{1\times C_{G'}(Q')}\Big)$$
$$\cong \mathrm{Ind}_{C_{P\times G'}(\ddot{Q})}^{C_{G\times G'}(\ddot{Q})}\Big(\mathrm{Ind}_{C_{\ddot{P}}(\ddot{Q})}^{C_{P\times G'}(\ddot{Q})}(S_{\ddot{\varepsilon}}(\ddot{Q}))\Big)^{1\times C_{G'}(Q')}$$

図式 (5) における下の行方向の写像は同型 (4.2.28) と包含写像の合成である。また、上の行方向の写像も同様にして得られる。一方、図式 (5) における列方向の 2 つの写像は、包含写像 $S_{\ddot{\varepsilon}}(\ddot{Q}) \subset S(\ddot{Q})$ を誘導して得られる $kC_G(Q)$-インテリア多元環としての埋め込みである。そこで、図式の可換性は明らかである。

上記 (1)、(2)、(3)、(4)、(5) より補題の主張は成り立つ。 □

5 章の図式-5.4、5.5、5.6 を合成することによって、次の定理の図式が得られる。定理の図式における記号は図式-5.4、5.6 および 4.1 節における記号に従い、さらに、合成写像 $h_0 \circ \mathrm{Ind}_P^G(\mathcal{E}')$ と包含写像の合成を θ_0、合成写像 $t_0 \circ h_0(Q) \circ \overline{\mathrm{Ind}_P^G(\mathcal{E}')}$ を θ_1、合成写像 $h_4 \circ \mathrm{Ind}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)}(\mathcal{E}(Q)')$ と包含写像の合成を θ_2、合成写像 $\iota_4 \circ \phi$ と包含写像の合成を $\hat{\iota}_4$ とおく。

定理 4.2.7　$A = \mathcal{O}Gb$ と $A' = \mathcal{O}G'b'$ がベーシック森田同値であるとする。このとき、次の多元環準同型から成る可換図式が得られる。

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ind}_P^G(A_\gamma)^Q \arrow[r, "\theta_0"] \arrow[d, "\mathrm{Br}_0"'] & \mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{G\times G'}(\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(N))^{\ddot{Q}} \arrow[d, "\mathrm{Br}_4"] \\
\mathrm{Ind}_P^G(A_\gamma)(Q) \arrow[r, "\theta_1"] & \mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{G\times G'}(\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(N))(\ddot{Q}) \\
\mathrm{Ind}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)}(A_\varepsilon(Q)) \arrow[r, "\theta_2"] \arrow[u, "\widehat{\iota_0}"] & \mathrm{Ind}_{C_{\ddot{P}}(\ddot{Q})}^{C_{G\times G'}(\ddot{Q})}\big(\mathrm{End}_k(N(Q_\delta))\big) \arrow[u, "\widehat{\iota_4}"']
\end{tikzcd}$$

図式-4.2.2

ここで、$\widehat{\iota_j}$（$j = 0$、4）はインテリア多元環としての埋め込みである。

5. 図式

図式-5.1

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ind}_P^G(A_\gamma)^Q \arrow[r, "\mathrm{Ind}_P^G(\mathcal{E})"] \arrow[d, "\mathrm{Br}_0"'] & \mathrm{Ind}_P^G\big(\mathrm{Res}_{\sigma^{-1}}(S)\otimes_{\mathcal{O}}\mathrm{Res}_{\sigma'\circ\sigma^{-1}}(A'_{\gamma'})\big)^Q \arrow[d, "\mathrm{Br}_1"] \\
\mathrm{Ind}_P^G(A_\gamma)(Q) \arrow[r, "\overline{\mathrm{Ind}_P^G(\mathcal{E})}"] & \mathrm{Ind}_P^G\big(\mathrm{Res}_{\sigma^{-1}}(S)\otimes_{\mathcal{O}}\mathrm{Res}_{\sigma'\circ\sigma^{-1}}(A'_{\gamma'})\big)(Q) \\
\mathrm{Ind}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)}(A_\gamma(Q)) \arrow[r, "\mathrm{Ind}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)}(\bar{\mathcal{E}})"] \arrow[u, "\iota_0"] & \mathrm{Ind}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)}(\mathrm{Res}_{\sigma_Q^{-1}}(S(\ddot{Q}))\otimes_k\mathrm{Res}_{\sigma'_Q\circ\sigma_Q^{-1}}(A'_{\gamma'}(Q'))) \arrow[u, "\iota_1"']
\end{tikzcd}$$

図式-5.2

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ind}_P^G(\mathrm{Res}_{\sigma^{-1}}(S)\otimes_{\mathcal{O}}\mathrm{Res}_{\sigma'\circ\sigma^{-1}}(A'_{\gamma'}))^Q \arrow[r, hook] \arrow[d, "\mathrm{Br}_1"'] & \mathrm{Ind}_P^G(\mathrm{Res}_{\sigma^{-1}}(S)\otimes_{\mathcal{O}}\mathrm{Res}_{\rho'}(\mathcal{O}G'))^Q \arrow[d, "\mathrm{Br}_2"] \\
\mathrm{Ind}_P^G(\mathrm{Res}_{\sigma^{-1}}(S)\otimes_{\mathcal{O}}\mathrm{Res}_{\sigma'\circ\sigma^{-1}}(A'_{\gamma'}))(Q) \arrow[r, hook] & \mathrm{Ind}_P^G(\mathrm{Res}_{\sigma^{-1}}(S)\otimes_{\mathcal{O}}\mathrm{Res}_{\rho'}(\mathcal{O}G'))(Q) \\
\mathrm{Ind}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)}(\mathrm{Res}_{\sigma_Q^{-1}}(S(\ddot{Q}))\otimes_k\mathrm{Res}_{\sigma'_Q\circ\sigma_Q^{-1}}(A'_{\gamma'}(Q'))) \arrow[r, hook] \arrow[u, "\iota_1"] & \mathrm{Ind}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)}(\mathrm{Res}_{\sigma_Q^{-1}}(S(\ddot{Q}))\otimes_k\mathrm{Res}_{\rho'_Q}(kC_{G'}(Q'))) \arrow[u, "\iota_2"'] \\
\mathrm{Ind}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)}(\mathrm{Res}_{\sigma_Q^{-1}}(S_{\ddot{\varepsilon}}(\ddot{Q}))\otimes_k\mathrm{Res}_{\sigma'_Q\circ\sigma_Q^{-1}}(A'_{\varepsilon'}(Q'))) \arrow[r, hook] \arrow[u, hook] & \mathrm{Ind}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)}(\mathrm{Res}_{\sigma_Q^{-1}}(S_{\ddot{\varepsilon}}(\ddot{Q}))\otimes_k\mathrm{Res}_{\rho'_Q}(kC_{G'}(Q'))) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

図式-5.3

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ind}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)}(A_\gamma(Q)) \arrow[r, "\mathrm{Ind}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)}(\bar{\mathcal{E}})"] & \mathrm{Ind}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)}(\mathrm{Res}_{\sigma_Q^{-1}}(S(\ddot{Q}))\otimes_k\mathrm{Res}_{\sigma'_Q\circ\sigma_Q^{-1}}(A'_{\gamma'}(Q'))) \\
\mathrm{Ind}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)}(A_\varepsilon(Q)) \arrow[r, "\mathrm{Ind}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)}(\mathcal{E}(Q))"] \arrow[u, hook] & \mathrm{Ind}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)}(\mathrm{Res}_{\sigma_Q^{-1}}(S_{\ddot{\varepsilon}}(\ddot{Q}))\otimes_k\mathrm{Res}_{\sigma'_Q\circ\sigma_Q^{-1}}(A'_{\varepsilon'}(Q'))) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

図式-5.4

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ind}_P^G(A_\gamma)^Q \arrow[r, "\mathrm{Ind}_P^G(\mathcal{E}')"] \arrow[d, "\mathrm{Br}_0"'] & \mathrm{Ind}_P^G(\mathrm{Res}_{\sigma^{-1}}(S)\otimes_{\mathcal{O}}\mathrm{Res}_{\rho'}(\mathcal{O}G'))^Q \arrow[d, "\mathrm{Br}_2"] \\
\mathrm{Ind}_P^G(A_\gamma)(Q) \arrow[r, "\overline{\mathrm{Ind}_P^G(\mathcal{E}')}"] & \mathrm{Ind}_P^G(\mathrm{Res}_{\sigma^{-1}}(S)\otimes_{\mathcal{O}}\mathrm{Res}_{\rho'}(\mathcal{O}G'))(Q) \\
\mathrm{Ind}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)}(A_\varepsilon(Q)) \arrow[r, "\mathrm{Ind}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)}(\mathcal{E}(Q)')"] \arrow[u, "\widehat{\iota_0}"] & \mathrm{Ind}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)}(\mathrm{Res}_{\sigma_Q^{-1}}(S_{\ddot{\varepsilon}}(\ddot{Q}))\otimes_k\mathrm{Res}_{\rho'_Q}(kC_{G'}(Q'))) \arrow[u, "\widehat{\iota_2}"']
\end{tikzcd}$$

図式-5.5

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Ind}_P^G(\mathrm{Res}_{\sigma^{-1}}(S)\otimes_{\mathcal{O}}\mathrm{Res}_{\rho'}(\mathcal{O}G'))^Q \arrow[r, "h_0", "\cong"'] \arrow[d, "\mathrm{Br}_2"'] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & \mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{G\times G'}(S)^{Q\times G'} \arrow[d, "\mathrm{Br}_3"] \\
\mathrm{Ind}_P^G(\mathrm{Res}_{\sigma^{-1}}(S)\otimes_{\mathcal{O}}\mathrm{Res}_{\rho'}(\mathcal{O}G'))(Q) \arrow[r, "h_0(Q)", "\cong"'] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & \big(\mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{G\times G'}(S)^{1\times G'}\big)(Q) \\
\mathrm{Ind}_P^G(\mathrm{Res}_{\sigma^{-1}}(S)\otimes_{\mathcal{O}}\mathrm{Res}_{\rho'}(\mathcal{O}G'))(Q) \arrow[r, "h_1(Q)", "\sim"'] \arrow[dr, phantom, "(3)"] & \big(\mathrm{Ind}_P^G(\mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{P\times G'}(S)^{1\times G'})\big)(Q) \arrow[u, "\cong"', "h_0(Q)\circ h_1(Q)^{-1}"] \\
\mathrm{Ind}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)}(\mathrm{Res}_{\sigma_Q^{-1}}(S(\ddot{Q}))\otimes_k\mathrm{Res}_{\rho'_Q}(kC_{G'}(Q'))) \arrow[u, "\iota_2"] \arrow[r, "h_2", "\cong"'] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(4)"] & \mathrm{Ind}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)}\big(\mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{P\times G'}(S)^{1\times G'}(Q)\big) \arrow[u, "\iota_3"'] \\
\mathrm{Ind}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)}(\mathrm{Res}_{\sigma_Q^{-1}}(S(\ddot{Q}))\otimes_k\mathrm{Res}_{\rho'_Q}(kC_{G'}(Q'))) \arrow[r, "h_3", "\cong"'] \arrow[dr, phantom, "(5)"] & \mathrm{Ind}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)}\big(\mathrm{Ind}_{C_{\ddot{P}}(\ddot{Q})}^{C_{P\times G'}(\ddot{Q})}(S(\ddot{Q}))^{1\times C_{G'}(Q')}\big) \arrow[u, "\cong"', "h_2\circ h_3^{-1}"] \\
\mathrm{Ind}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)}(\mathrm{Res}_{\sigma_Q^{-1}}(S_{\ddot{\varepsilon}}(\ddot{Q}))\otimes_k\mathrm{Res}_{\rho'_Q}(kC_{G'}(Q'))) \arrow[u, hook] \arrow[r, "h_4", "\cong"'] & \mathrm{Ind}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)}\big(\mathrm{Ind}_{C_{\ddot{P}}(\ddot{Q})}^{C_{P\times G'}(\ddot{Q})}(S_{\ddot{\varepsilon}}(\ddot{Q}))^{1\times C_{G'}(Q')}\big) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}
$$

図式-5.6

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{G\times G'}(S)^{Q\times G'} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\mathrm{Br}_3"'] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & \mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{G\times G'}(S)^{\ddot{Q}} \arrow[d, "\mathrm{Br}_4"] \\
\big(\mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{G\times G'}(S)^{1\times G'}\big)(Q) \arrow[r, "t_0"] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & \mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{G\times G'}(S)(\ddot{Q}) \arrow[d, equal] \\
\big(\mathrm{Ind}_P^G(\mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{P\times G'}(S)^{1\times G'})\big)(Q) \arrow[u, "h_0(Q)\circ h_1(Q)^{-1}", "\cong"'] \arrow[r, "t_1"] \arrow[dr, phantom, "(3)"] & \big(\mathrm{Ind}_{P\times G'}^{G\times G'}(\mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{P\times G'}(S))\big)(\ddot{Q}) \\
\mathrm{Ind}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)}\big(\mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{P\times G'}(S)^{1\times G'}(Q)\big) \arrow[u, "\iota_3"] \arrow[r, "t_2"] \arrow[dr, phantom, "(4)"] & \mathrm{Ind}_{C_{P\times G'}(\ddot{Q})}^{C_{G\times G'}(\ddot{Q})}\big(\mathrm{Ind}_{\ddot{P}}^{P\times G'}(S)(\ddot{Q})\big) \arrow[u, "\iota_4"'] \\
\mathrm{Ind}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)}\big(\mathrm{Ind}_{C_{\ddot{P}}(\ddot{(Q)})}^{C_{P\times G'}(\ddot{Q})}(S(\ddot{Q}))^{1\times C_{G'}(Q')}\big) \arrow[u, "h_2\circ h_3^{-1}"] \arrow[r, hook] \arrow[dr, phantom, "(5)"] & \mathrm{Ind}_{C_{P\times G'}(\ddot{Q})}^{C_{G\times G'}(\ddot{Q})}\big(\mathrm{Ind}_{C_{\ddot{P}}(\ddot{(Q)})}^{C_{P\times G'}(\ddot{Q})}(S(\ddot{Q}))\big) \arrow[u, "\phi"'] \\
\mathrm{Ind}_{C_P(Q)}^{C_G(Q)}\big(\mathrm{Ind}_{C_{\ddot{P}}(\ddot{(Q)})}^{C_{P\times G'}(\ddot{Q})}(S_{\ddot{\varepsilon}}(\ddot{Q}))^{1\times C_{G'}(Q')}\big) \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] & \mathrm{Ind}_{C_{P\times G'}(\ddot{Q})}^{C_{G\times G'}(\ddot{Q})}\big(\mathrm{Ind}_{C_{\ddot{P}}(\ddot{(Q)})}^{C_{P\times G'}(\ddot{Q})}(S_{\ddot{\varepsilon}}(\ddot{Q}))\big) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}
$$

6. おわりに

定理 4.2.7 における可換図式-4.2.2 の存在は次のことを意味する。ベーシック森田同値の概念は、ソース多元環レベルでは、その局所構造と "compatible" である。しかし、ブロック多元環レベルでは、図式-4.2.2 に相当する明解な可換図式を得ることは困難であると思われる。

本論文では全ての命題にできるだけ丁寧な証明を与えることにした。その結果、定理 4.2.7 の証明のために、5 章におけるかなり煩雑な図式を記載することになった。ただし、この論文で取り扱った [9] の Puig 理論自体がかなり複雑なもであることを考慮すれば、論文に記載するか否かは別として、この程度の図式は必要になると思う。

謝辞

本論文と [2] の TEX 原稿作成に際し、本学総合教育の大嶋康裕氏の協力を得た。大嶋氏の助力なしには両論文を完成することはできなかったと思う。ここに記して謝意を表する。

参考文献

1) Barker, L. (1995)「G-algebras, Clifford theory and the Green correspondence」『Journal of Algebra』 172, 335-353.

2) 河合浩明（2012)「ベーシック森田同値の局所構造に関する注意 II」, プレプリント.

3) König, S. and Zimmermann, A. (1998)『Derived Equivalences for Group Rings』(Lecture Notes in Mathematics, 1685) Springer.

4) Linckelmann, M. (1998)「On derived equivalences and local structure of blocks of finite groups」『Turkish Journal of Mathematics』22, 93-107.

5) Linckelmann, M. (1998)「On stable equivalences of Morita type」in『Derived Equivalences for Group Rings』(L. N. M., 1685) Springer.

6) 永尾汎、津島行男（1987)『有限群の表現』裳華房.

7) Puig, L. (1988)「Nilpotent blocks and their source algebras」『Inventiones Mathematics』93, 77-116.

8) Puig, L. (1988)「Pointed groups and construction of modules」『Journal of Algebra』116, 7-129.

9) Puig, L. (1999)『On the Local Structure of Morita and Rickard Equivalences between Brauer Blocks』Birkhäuser.

10) Rickard, J. (1989)「Morita theory for derived categories」『Journal of London Mathematical Society』 39, 436-456.

11) Rickard, J. (1996)「Splendid equivalences : Derived categories and permutation modules」『Proceeding London Mathematical Society』72, 331-358.

12) Thévenaz, J. (1995)『G-algebras and Modular Representation Theory』Oxford University Press.